

Д.Р. МЕРКИН

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ
УСТОЙЧИВОСТИ
ДВИЖЕНИЯ



Д. Р. МЕРКИН

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 531
М 52
УДК 531.1 (075.8)

Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения: Учеб. пособие для вузов.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 304 с.

Дается изложение основ теории устойчивости движения, базирующееся на общем курсе высшей математики для вузов. Основное внимание уделено наиболее эффективным методам исследования — прямому методу Ляпунова, исследованию устойчивости по уравнениям первого приближения и частотным методам. Отдельные главы посвящены исследованию устойчивости движения по структуре действующих сил, устойчивости неавтономных систем, в том числе систем с периодическими коэффициентами, и систем автоматического регулирования.

Для студентов, аспирантов, преподавателей, инженеров и научных работников, изучающих и использующих теорию устойчивости движения в своей работе.

Ил. 74. Библиогр. 60 назв.

Рецензент

член-корреспондент АН СССР В. В. Румянцев

Давид Рахмилевич Меркин

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Редакторы И. М. Бокоса, А. Г. Мордвинцев

Художественный редактор Т. Н. Кольченко

Технический редактор И. Ш. Аксельрод

Корректоры Л. И. Назарова, Н. Б. Румянцева

ИБ № 32416

Сдано в набор 16.12.86. Подписано к печати 21.05.87. Формат 84×108/32. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,96. Усл. кр.-отт. 15,96. Уч.-изд. л. 16,73. Тираж 8100 экз. Заказ № 17. Цена 85 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»

121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6

М $\frac{1703020000-132}{053 (02)-87}$ 85-87

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1976;
с изменениями 1987

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	9
Глава I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	13
§ 1.1. Основные определения	13
§ 1.2. Уравнения возмущенного движения	18
§ 1.3. Примеры на составление уравнений возмущенного движения	23
1. Дифференциальные уравнения возмущенного движения конического маятника (23). 2. Дифференциальные уравнения возмущенного движения центра масс искусственного спутника Земли (25). 3. Уравнения возмущенного движения линейных систем (27).	
Глава II. ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА (АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ)	29
§ 2.1. Функции Ляпунова. Критерий Сильвестра	29
§ 2.2. Теорема Ляпунова об устойчивости движения	37
§ 2.3. Теоремы об асимптотической устойчивости	39
§ 2.4. Теоремы о неустойчивости движения	49
§ 2.5. Методы построения функции Ляпунова	53
§ 2.6. Примеры на применение теоремы Ляпунова об устойчивости движения	57
1. Устойчивость движения конического маятника (57). 2. Устойчивость стационарного движения центра масс искусственного спутника Земли (59). 3. Достаточное условие устойчивости волчка (условие устойчивости вращательного движения снаряда) (62).	
§ 2.7. Примеры на применение теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения	67
1. Асимптотическая устойчивость равновесия твердого тела, находящегося в сопротивляющейся среде (67). 2. Устойчивость установившихся режимов вольтовой дуги в цепи с сопротивлением и самоиндукцией (68). 3. Условие устойчивости лампового генератора (72). 4. Устойчивость равновесия системы с одной степенью свободы, находящейся под действием потенциальной нелинейной силы и силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости (74).	
Глава III. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ	77
§ 3.1. Теорема Лагранжа	77
§ 3.2. Обратимость теоремы Лагранжа	81
§ 3.3. Циклические координаты. Преобразование Рауса	82

§ 3.4.	Стационарное движение и условия его устойчивости	86
§ 3.5.	Примеры	89
	1. Устойчивость стационарного движения конического маятника (89). 2. Устойчивость стационарных движений центра масс искусственного спутника Земли (90). 3. Устойчивость регулярной прецессии тяжелого гироскопа (92). 4. Устойчивость равновесного положения оси вращающегося уравновешенного ротора, установленного в нелинейных опорах (95).	
Глава IV. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ		97
§ 4.1.	Постановка задачи	97
§ 4.2.	Предварительные замечания	98
§ 4.3.	Основные теоремы об устойчивости по первому приближению	101
§ 4.4.	Критерий Гурвица	106
§ 4.5.	Примеры	110
	1. Условия устойчивости установившихся режимов вольтовой дуги в цепи с сопротивлением, самоиндукцией и зашунтированной емкостью (110). 2. Условие устойчивости лампового генератора (112). 3. Условие устойчивости установившегося режима двигателя с центробежным регулятором (113). 4. Необходимое условие устойчивости волчка (вращательного движения снаряда) (118). 5. Устойчивость стационарных движений оси вращающегося неуравновешенного ротора, установленного в нелинейных подшипниках (120).	
Глава V. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ		124
§ 5.1.	Введение	124
§ 5.2.	Матрицы и основные действия с ними	124
§ 5.3.	Элементарные делители	133
§ 5.4.	Устойчивость линейных автономных систем. Устойчивость резонанса. Примеры	142
Глава VI. ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ		150
§ 6.1.	Введение	150
§ 6.2.	Классификация сил	151
§ 6.3.	Постановка задачи	163
§ 6.4.	Коэффициенты устойчивости	168
§ 6.5.	Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия потенциальной системы	170
§ 6.6.	Примеры на применение теорем Томсона — Тета — Четаева	175
	1. Устойчивость волчка (175). 2. Устойчивость системы инерциальной навигации (176). 3. Гироскопический однорельсовый вагон (180).	
§ 6.7.	Устойчивость равновесия под действием одних гироскопических и диссипативных сил. Пример	183
§ 6.8.	Влияние на устойчивость равновесия неконсервативных позиционных сил	191
§ 6.9.	Примеры исследования устойчивости движения систем с неконсервативными силами	203
	1. Модель упругого стержня, находящегося под действием следящей силы (204). 2. Неустойчивость ротора, вращающегося в аэродинамической среде (207). 3. Гировертикаль с радиальной коррекцией (211).	

Г л а в а VII. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ	214
§ 7.1. Функции Ляпунова для неавтономных систем. Обобщенный критерий Сильвестра	214
§ 7.2. Основные теоремы прямого метода для неавтономных систем	219
§ 7.3. Примеры построения функции Ляпунова для неавтономных систем	222
1. Устойчивость движения гиригоризонткомаса (222).	
2. Математический пример (224).	
§ 7.4. Достаточные условия асимптотической устойчивости системы, жесткость и демпфирование которой нелинейны и зависят явно от времени	224
§ 7.5. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами	231
§ 7.6. Устойчивость решений уравнений Хилла и Матье	239
§ 7.7. Примеры исследования устойчивости систем с параметрическим возбуждением	254
1. Влияние вибрации точки подвеса на устойчивость равновесия маятника (255). 2. Исследование устойчивости нулевого решения уравнения Хилла при параметрическом возбуждении по закону квазипрямоугольного сигнала (257).	
 Г л а в а VIII. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ	 261
§ 8.1. Введение	261
§ 8.2. Дифференциальные уравнения возмущенного движения систем автоматического регулирования	262
§ 8.3. Преобразование уравнений возмущенного движения системы регулирования к канонической форме	266
§ 8.4. Построение функции Ляпунова	270
§ 8.5. Определение условий абсолютной устойчивости. Пример	277
 Г л а в а IX. ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ	 286
§ 9.1. Введение	286
§ 9.2. Передаточные функции и частотные характеристики	286
§ 9.3. Критерий Найквиста устойчивости линейной системы	290
§ 9.4. Частотные критерии абсолютной устойчивости систем с непрерывной нелинейностью	292
§ 9.5. Примеры	296
1. Математический пример (296). 2. Исследование устойчивости самолета с курсовым автопилотом (297). 3. Непрямое регулирование двигателя с жесткой обратной связью (299).	
Список литературы	301

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга является одним из пособий, выходящих в издательстве «Наука» в качестве дополнения к курсу теоретической механики Н. В. Бутенина, Я. Л. Лунца и Д. Р. Меркина. Издание этих пособий связано с тем, что учащиеся некоторых вузов нуждаются в более подробном ознакомлении с рядом важнейших проблем, чем это удалось сделать в основном курсе. Книги, входящие в предлагаемую серию, посвящены именно таким проблемам: аналитической механике, теории устойчивости движения, теории колебаний, теории гироскопов, теории удара; в будущем этот перечень предполагается продолжить.

В Советском Союзе издано много книг [5, 6, 8, 16, 18, 21, 27, 28, 29, 35, 37, 49], в которых теория устойчивости движения излагается с различных точек зрения и с различной полнотой. Некоторые из этих книг являются не учебными пособиями, а научными монографиями. Книжки же, построенные как учебные руководства, рассчитаны, как правило, на студентов математико-механических факультетов университетов, имеющих специальную математическую подготовку. Для лиц, знающих математику в объеме высшего технического учебного заведения, эти книги малодоступны.

Настоящая книга рассчитана в основном на студентов и преподавателей вузов, а также на инженеров и научных работников, использующих теорию устойчивости движения в своей работе. В связи с этим в книге применяется математический аппарат, не выходящий за рамки курса

математики, читаемого почти во всех высших технических учебных заведениях. Необходимые дополнительные сведения из курса математики приводятся в книге.

В целях упрощения изложения вначале рассматриваются автономные системы и только в седьмой главе изучается устойчивость движений неавтономных систем. С этой же целью доказательство некоторых теорем приведено в упрощающих предположениях. Во всех этих случаях оговаривается, в чем состоит упрощение и где можно найти доказательство, свободное от сделанных ограничений.

Основное внимание в книге уделено наиболее эффективным методам исследования устойчивости движения — прямому методу Ляпунова и исследованию устойчивости по уравнениям первого приближения. Отдельные главы посвящены исследованию устойчивости движения по структуре действующих сил, устойчивости движения неавтономных систем, в том числе систем, возмущенное движение которых описывается линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами.

В восьмой главе излагается применение прямого метода Ляпунова к исследованию устойчивости систем автоматического регулирования и, наконец, последняя, девятая глава посвящена применению частотных методов к исследованию устойчивости движения.

Учитывая, что лица, впервые изучающие теорию устойчивости движения, испытывают обычно затруднения в применении ее к решению практических задач, в книге большое внимание уделено подбору и решению примеров, взятых из различных областей науки и техники; значительная часть примеров имеет самостоятельное значение.

В основу настоящего руководства положен курс лекций, читанный в течение ряда лет автором в Ленинградском государственном университете на факультете повышения квалификации преподавателей теоретической механики. Большое влияние на содержание и характер

книги оказали многочисленные консультации инженеров и научных работников научно-исследовательских институтов Ленинграда по различным вопросам теории устойчивости движения и ее приложений.

В настоящее, третье издание книги (первое издание вышло в свет в 1971 г., второе — в 1976 г.) добавлены новые примеры, в нем учтены некоторые работы, опубликованные после выхода второго издания, пересмотрен текст книги, исправлены замеченные опечатки.

При подготовке первого издания книги большую помощь автору оказали чл.-кор. АН СССР А. И. Лурье, чл.-кор. АН СССР В. В. Румянцев, доценты Б. А. Смольников и Б. Л. Минцберг. Большая часть девятой главы написана А. Х. Гелигом. Много ценных замечаний сделал по второму и третьему изданиям чл.-кор. АН СССР В. В. Румянцев. Автор пользуется случаем выразить всем перечисленным лицам свою искреннюю благодарность.

Д. Р. Меркин

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы устойчивости возникли впервые в механике при изучении равновесных положений системы. Простое наблюдение показывает, что некоторые положения равновесия системы устойчивы к небольшим возмущениям, а другие принципиально возможные равновесные положения практически не могут быть реализованы. Так, например, если маятник занимает нижнее положение, то небольшие возмущения могут вызвать только колебания его. Если же после некоторых усилий удастся установить маятник в верхнем положении, то малейший толчок вызовет его падение. Конечно, в данном примере вопрос об устойчивости решается элементарно, но в общем случае далеко не всегда ясно, при каких условиях равновесное положение системы будет устойчиво. В 1644 г. критерий устойчивости равновесия системы тел, находящихся под действием сил тяжести, в общем виде сформулировал Е. Торричелли, а в 1788 г. Ж. Лагранж доказал теорему, определяющую достаточные условия устойчивости равновесия произвольной консервативной системы (см. § 3.1).

В середине XIX столетия в науке и технике возникли проблемы, потребовавшие постановки общей задачи об устойчивости не только равновесия, но и движения. Укажем на одну из них.

Центробежные регуляторы, установленные на паровых машинах небольшой мощности, устойчиво сохраняли заданные обороты двигателя. С увеличением мощности машин регуляторы, построенные по тем же схемам, не только не обеспечивали надежное регулирование, но даже разгоняли двигатели, создавая неустойчивый режим работы (см. пример 3 § 4.5). Это непонятное для инженеров и техников тех лет явление вызвало серьезный кризис в двигателестроении и потребовало усилий ученых многих стран для решения возникшей проблемы. Исследования Дж. К. Максвелла (1868 г.), И. А. Вышнеградского

(1876—1877 гг.) и других показали, что решение как этой задачи, так и общее развитие теории регулирования требует, прежде всего, установления критериев устойчивости движения.

В конце XIX столетия появились работы, в которых вопросы устойчивости движения трактовались с общих позиций. Так, в 1877—1884 гг. были опубликованы монографии Э. Дж. Рауса [56, 57], а в 1882 г. — докторская диссертация Н. Е. Жуковского [20], в которых авторы, пользуясь различными методами, рассмотрели ряд общих вопросов устойчивости движения. Некоторые результаты и методы, развитые ими, не утратили своего значения и в наши дни.

Основной недостаток работ того времени состоял в том, что при анализе уравнений возмущенного движения авторы исходили из линеаризованных уравнений возмущенного движения и не рассматривали влияния членов высшего порядка. Так, например, если уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\alpha x_2 + \alpha x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha x_1 + \alpha x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\end{aligned}\quad (*)$$

то, согласно рекомендациям авторов тех лет, их можно упростить, отбросив нелинейные члены, т. е. заменить уравнения (*) уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\alpha x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha x_1,\end{aligned}\quad (**)$$

и судить устойчиво или неустойчиво движение не по уравнениям (*), а по уравнениям (**). Между тем вывод об устойчивости движения, основанный на линейных уравнениях (**), ничего общего не имеет с результатом анализа точных уравнений (*) (см. пример на с. 20—21).

В 1892 г. была опубликована докторская диссертация А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения». Эта работа содержит так много плодотворных идей и результатов первостепенного значения, что всю историю теории устойчивости движения не без основания делят на ляпуновский и послеляпуновский периоды. В кратком введении невозможно дать обзор всего, что внес А. М. Ля-

пунов в теорию устойчивости движения. Полностью оценить его работу может только специалист, хорошо знающий предмет. Поэтому мы ограничимся здесь указанием на некоторые результаты, принадлежащие А. М. Ляпунову.

Прежде всего А. М. Ляпунов дал строгое определение устойчивости движения. Отсутствие такого определения приводило часто к недоразумениям, так как движение устойчивое в одном смысле может оказаться неустойчивым в другом понимании этих слов, и наоборот. Определение А. М. Ляпунова оказалось настолько удачным, что оно принято как основное всеми учеными.

А. М. Ляпунову принадлежит постановка задачи об устойчивости движения по уравнениям первого приближения, когда об устойчивости можно судить по линеаризованным уравнениям без необходимости привлечения к анализу точных уравнений. Он дал полное решение этой задачи для так называемых установившихся движений, когда уравнения возмущенного движения не содержат времени t в явной форме, и для большого класса неустановившихся движений, причем особенно подробно им были изучены периодические движения. А. М. Ляпунов предложил два основных метода исследования устойчивости движения, из них второй метод, или, как сейчас принято называть его, прямой метод, получил наибольшее распространение благодаря своей простоте и эффективности. Он поставил вопрос об обратимости теоремы Лагранжа и доказал ее для двух частных случаев.

После А. М. Ляпунова теория устойчивости движения развивалась по различным направлениям. Углублялись методы и уточнялись результаты самого А. М. Ляпунова, расширялся круг понятий, введенных А. М. Ляпуновым в теорию устойчивости движения, в частности, усилия многих ученых были направлены на определение условий устойчивости при больших начальных и постоянно действующих возмущениях, а также на конечном промежутке времени и при случайных силах. Возникло также направление, которое условно можно назвать прикладным. Речь идет не о многочисленных, ежедневно возникающих в науке и технике частных задачах, решаемых с помощью уже развитой теории, а о создании общих методов исследования устойчивости движения отдельных, достаточно обширных классов систем (системы автоматического регулирования, управляемые системы и т. п.).

Теория устойчивости движения широко применяется в физике, астрономии, химии и даже биологии (см., например, [46б]). Особо важное значение теория устойчивости движения имеет для техники. Корабль, самолет, ракета при своем движении должны устойчиво сохранять заданный курс. Турбины, генераторы должны устойчиво сохранять заданный режим работы. Гироскопический компас должен устойчиво показывать направление географического меридиана и т. п.

В заключение отметим, что теория устойчивости движения еще далека от завершения. Она продолжает развиваться, охватывая все более широкий круг вопросов. В ее разработке принимают участие много ученых различных стран. Перечислить все имена практически невозможно, некоторые из них будут названы в тексте книги.

дифференциальных уравнений (1.1), удовлетворяющие начальным условиям:

$$\text{при } t = t_0: y_1 = f_1(t_0), \dots, y_n = f_n(t_0). \quad (1.3)$$

Изменим условия (1.3), дав начальным значениям переменных y_1, \dots, y_n небольшие по модулю приращения $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, а именно пусть теперь

$$\text{при } t = t_0: y_1 = f_1(t_0) + \varepsilon_1, \dots, y_n = f_n(t_0) + \varepsilon_n. \quad (1.4)$$

Движение системы, отвечающее измененным начальным условиям (1.4), называется *возмущенным движением*, а величины $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — *возмущениями*.

Обозначим значения переменных y_j в возмущенном движении через $y_j(t)$, а в невозмущенном движении через $f_j(t)$ и составим разности между ними

$$x_j = y_j(t) - f_j(t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.5)$$

Переменные x_j называются *отклонениями* или *вариациями* величин y_j . Если все отклонения равны нулю, то есть

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, \quad (1.6)$$

то возмущенное движение $y_j(t)$ будет совпадать с невозмущенным движением $f_j(t)$, иначе говоря, *невозмущенному движению отвечают нулевые значения переменных x_j* .

В дальнейшем для удобства изложения будем пользоваться часто языком геометрии. Совокупность отклонений x_1, \dots, x_n в n -мерном пространстве переменных x_1, \dots, x_n определяет точку M (она называется *изображающей точкой*)¹⁾. В возмущенном движении при изменении величин x_1, \dots, x_n изображающая точка M будет описывать некоторую траекторию γ . *Невозмущен-*

¹⁾ В обычном трехмерном евклидовом пространстве совокупность трех чисел x_1, x_2, x_3 определяет точку M . Обобщая это понятие, под точкой M в n -мерном пространстве переменных x_1, \dots, x_n понимают совокупность n чисел x_1, \dots, x_n . Расстояние r от этой точки до начала O ортогональной координатной системы $Ox_1x_2 \dots x_n$ определяется равенством

$$r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Продолжая обобщение понятий, существующих в обычном трехмерном евклидовом пространстве, говорят, что всякое уравнение $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ определяет в пространстве n измерений некоторую поверхность, в частности, уравнение $x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2$ определяет в n -мерном пространстве сферу радиуса r .

ному движению $x_j = 0$ отвечает неподвижная точка — начало координат.

Отклонение возмущенного движения от невозмущенного движения определяется величинами $x_j(t)$. Если все $x_j(t)$ малы по модулю, то будет мала и сумма их квадратов

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2; \quad (1.7)$$

если же отклонение хотя бы одной координаты будет велико, то сумма (1.7) будет велика. Обратное утверждение, очевидно, также справедливо. Поэтому в качестве меры отклонения возмущенного движения от невозмущенного движения можно выбрать величину суммы (1.7). Так как сумма (1.7) равна квадрату расстояния от изображающей точки M до начала координат, то это расстояние характеризует отклонение возмущенного движения от невозмущенного.

Согласно определению возмущенного движения и равенствам (1.4), (1.5), будем иметь

$$\text{при } t = t_0: \quad x_j = x_{0j} = \varepsilon_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (1.8)$$

т. е. начальные значения отклонений x_{0j} представляют возмущения системы.

Примем следующее определение Ляпунова. Если по любому положительному числу ε , как бы оно мало ни было, можно найти такое положительное число δ , что при всяких возмущениях x_{0j} , удовлетворяющих условию

$$\sum x_{0j}^2 \leq \delta, \quad (1.9)$$

и при любом $t \geq t_0$ будет выполняться неравенство

$$\sum x_j^2 < \varepsilon, \quad (1.10)$$

то невозмущенное движение устойчиво, в противном случае — неустойчиво.

Геометрически это определение означает следующее. Рассмотрим сферу $\sum x_j^2 = \varepsilon$. Выберем радиус $\sqrt{\varepsilon}$ этой сферы произвольно малым. Если движение устойчиво, то для этой сферы должна найтись другая сфера $\sum x_j^2 = \delta$ радиуса $\sqrt{\delta}$, обладающая следующим свойством. Изображающая точка M , начав свое движение из любого положения M_0 , лежащего внутри или на поверхности сферы

δ^1), при своем дальнейшем движении остается всегда внутри сферы ϵ , никогда не достигая ее поверхности (рис. 1.1)²⁾. Если же возмущенное движение неустойчиво, то хотя бы одна траектория изображающей точки M с течением времени пересечет сферу ϵ изнутри наружу при сколь угодно близком положении точки M к началу координат.

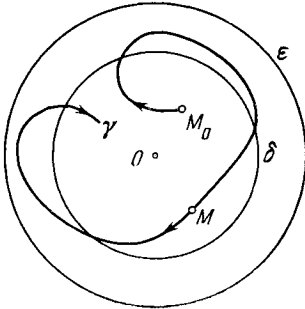


Рис. 1.1

Практически устойчивость данного невозмущенного движения означает, что при достаточно малых начальных возмущениях возмущенное движение будет сколь угодно мало отличаться от невозмущенного движения. Если же невозмущенное движение неустойчиво, то возмущенное движение будет отходить от него, как бы малы ни были начальные возмущения.

Если невозмущенное движение устойчиво и при этом любое возмущенное движение при достаточно малых начальных возмущениях стремится к невозмущенному движению, т. е. если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum x_j^2(t) = 0, \quad (1.11)$$

то невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым*. Заметим, что одного предельного условия (1.11) недостаточно для асимптотической устойчивости — необходимо, чтобы помимо этого условия движение было устойчивым. Геометрически это означает, что при асимптотической устойчивости изображающая точка должна неограниченно стремиться к началу координат, не выходя из сферы ϵ (см. пример на с. 20—21).

Кроме пространства отклонений x_1, \dots, x_n рассмотрим пространство исходных переменных y_1, \dots, y_n . Совокупность значений y_1, \dots, y_n определяет в этом пространстве некоторую точку N . Пусть в невозмущенном движении (1.2) точка N описывает траекторию I , а в возму-

¹⁾ Будем для простоты сферу с радиусом $\sqrt{\delta}$ (аналогично $\sqrt{\epsilon}$) называть сферой δ (или сферой ϵ).

²⁾ Для наглядности все рисунки, соответствующие n -мерному пространству, строятся для $n = 2$.

щенном движении — траекторию II (рис. 1.2, а). Возьмем на этих траекториях две произвольные точки N и N' , отвечающие одному и тому же моменту времени t . Квадрат расстояния r между этими точками равен

$$r^2 = \Sigma (y_j - f_j)^2 = \Sigma x_j^2.$$

При устойчивом движении траектория II близка к траектории I (r всегда меньше ϵ), а при асимптотической устойчивости траектория II неограниченно стремится к траектории I (рис. 1.2, б).

Близость траекторий I и II — необходимое условие устойчивости движения, но оно, конечно, недостаточно. Действительно, расстояние между точками N и N' , отвечающими одному и тому же моменту времени, может возрастать не только для расходящихся, но и для близких траекторий (рис. 1.2, в).

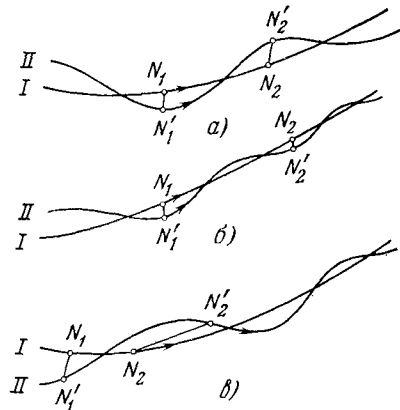


Рис. 1.2

Может оказаться, что движение, устойчивое относительно одних переменных, неустойчиво относительно других. Так, можно показать, что движение искусственного спутника Земли по круговой орбите устойчиво относительно его радиуса-вектора (орбитальная устойчивость) и неустойчиво относительно декартовых координат. Поэтому, говоря об устойчивости движения, необходимо всегда оговаривать, относительно каких величин рассматривается устойчивость.

В тех случаях, когда асимптотическая устойчивость имеет место при *любых* возмущениях (не обязательно малых), невозмущенное движение называется *устойчивым в целом*.

Иногда устойчивость имеет место не при любых возмущениях, а при возмущениях, подчиненных некоторым условиям. Такая устойчивость называется *условной*.

Остановимся на особенностях определения устойчивости движения по Ляпунову. Во-первых, предпола-

гается, что возмущения налагаются только на начальные условия, иначе говоря, возмущенное движение происходит при тех же силах (источниках энергии), что и невозмущенное движение. Во-вторых, устойчивость рассматривается на бесконечно большом промежутке времени. В-третьих, возмущения предполагаются малыми. Несмотря на эти ограничения, определение Ляпунова устойчивости движения является эффективным и плодотворным в приложениях. Кроме того, методы, развитые Ляпуновым, очень часто лежат в основе исследования других видов устойчивости движения¹⁾.

§ 1.2. Уравнения возмущенного движения

В тех случаях, когда известно общее решение дифференциальных уравнений движения (1.1), можно непосредственно определить значения переменных $y_j(t)$ в возмущенном движении, составить вариации $x_j = y_j(t) - f_j(t)$ и, исследуя их, решить вопрос об устойчивости невозмущенного движения $f_j(t)$.

Однако в подавляющем большинстве случаев общее решение дифференциальных уравнений движения (1.1) неизвестно, поэтому этот метод практически редко может быть использован. Но даже в тех случаях, когда общее решение дифференциальных уравнений (1.1) можно построить, ответ на вопрос — устойчиво ли движение, целесообразно, как правило, искать не из анализа общего решения, а с помощью методов, специально разработанных в общей теории устойчивости движения. Эти методы основаны на качественном анализе дифференциальных уравнений возмущенного движения, которым удовлетворяют отклонения (вариации) x_j .

¹⁾ Устойчивость движения при постоянно действующих возмущениях излагается в книгах И. Г. Малкина [37], Н. Н. Красовского [27], Е. А. Барбашина [5] и др. В книгах Е. А. Барбашина [5, 6] и книге Н. Н. Красовского [27] рассматривается устойчивость в целом (см. § 2.3). Устойчивость движения на конечном интервале времени и конечных начальных возмущениях излагается в книгах Н. Г. Четаева [49] и К. А. Карачарова, А. Г. Пилютника [25]; задача об устойчивости движения со случайными параметрами рассматривается в работе И. Я. Каца, Н. Н. Красовского [26] и др. Устойчивость систем с последействием (с запаздыванием времени) излагается в книге Н. Н. Красовского [27]. Подробные обзоры работ по исследованию устойчивости методом построения функций Ляпунова, устойчивости неавтономных систем и устойчивости на конечном интервале даны в [2а, 46а, 1а] соответственно.

Для вывода уравнений возмущенного движения найдем из равенства (1.5) переменные $y_j(t)$:

$$y_j(t) = f_j(t) + x_j(t).$$

Внесем эти значения для $y_j(t)$ в дифференциальные уравнения движения системы (1.1). Получим

$$\frac{df_j}{dt} + \frac{dx_j}{dt} = Y_j(f_1 + x_1, \dots, f_n + x_n, t).$$

Разложим правые части этих уравнений в ряды Тейлора по степеням x_j :¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{df_j}{dt} + \frac{dx_j}{dt} = \\ = Y_j(f_1, \dots, f_n, t) + \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_n} \right)_0 x_n + X_j^*, \end{aligned}$$

где X_j^* — совокупность членов, зависящих от отклонений x_i в степени выше первой.

Учтем теперь, что в невозмущенном движении функции $f_j(t)$ должны удовлетворять уравнениям движения (1.1), т. е.

$$\frac{df_j}{dt} = Y_j(f_1, \dots, f_n, t) \quad (j=1, \dots, n).$$

На этом основании будем иметь

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n + X_j^* \quad (j=1, \dots, n). \quad (1.12)$$

В этих уравнениях коэффициенты

$$a_{jk} = \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \right)_{x=0} \quad (1.13)$$

в общем случае являются функциями времени t , в частности, они могут быть постоянными.

Уравнения (1.12) называются *дифференциальными уравнениями возмущенного движения*. Если в этих уравнениях отбросить члены X_j^* , то полученные при этом уравнения

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \quad (j=1, \dots, n) \quad (1.14)$$

называются *уравнениями первого приближения*.

¹⁾ Здесь и в дальнейшем предполагается, что функции, разлагаемые в ряды, удовлетворяют соответствующим требованиям.

Уравнения первого приближения во многих случаях дают верный ответ на вопрос об устойчивости движения, но очень часто заключение, которое можно получить из этих приближенных уравнений, ничего общего не имеет с решением исходных уравнений.

Приведем пример. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид ($\alpha = \text{const}$)

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\alpha x_2 + \alpha x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha x_1 + \alpha x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Умножим первое уравнение на x_1 , второе на x_2 и сложим почленно оба уравнения:

$$x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} = \alpha (x_1^2 + x_2^2)^{3/2}$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x_1^2 + x_2^2) = \alpha (x_1^2 + x_2^2)^{3/2}.$$

Положим $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, где r — расстояние от начала координат до изображающей точки. После перехода к новой переменной r будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} = \alpha r^3$$

или

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r^2.$$

Это уравнение легко интегрируется, и его общее решение имеет вид

$$r = \frac{r_0}{1 - \alpha r_0 (t - t_0)},$$

где r_0 — значение r при $t = t_0$.

Из этого решения видно, что при $\alpha > 0$ расстояние r от изображающей точки M до начала координат неограниченно возрастает при $t \rightarrow t_0 + \frac{1}{\alpha r_0}$, т. е. движение неустойчиво. (Заметим, что $\lim_{t \rightarrow \infty} r^2 = 0$, т. е. условие (1.11) выполнено, хотя движение неустойчиво.) Если же $\alpha < 0$, то r монотонно убывает, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$, т. е. движение асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь уравнения первого приближения

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \alpha x_1,$$

которые получаются из уравнений (1.15) отбрасыванием членов порядка выше первого.

Для этих уравнений вместо равенства $\dot{r} = \alpha r^2$ будем иметь

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

или, интегрируя, $r = r_0$.

Это решение показывает, что изображающая точка M , отвечающая уравнениям первого приближения, движется по окружности, радиус которой равен начальному отклонению точки M от начала координат. Таким образом, из уравнений первого приближения следует устойчивость невозмущенного движения $x_1 = x_2 = 0$ при всех α . Этот вывод ничего общего не имеет с результатом анализа исходных уравнений (1.15), согласно которому при $\alpha > 0$ движение неустойчиво, а при $\alpha < 0$ асимптотически устойчиво.

Вернемся к уравнениям возмущенного движения (1.12). Обозначив все члены, стоящие в правых частях этих уравнений, символами X_j , получим для неавтономных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, \dots, x_n, t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.16)$$

Если уравнения возмущенного движения автономны, т. е. не содержат время t явно, то будем иметь

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, \dots, x_n). \quad (1.17)$$

В дальнейшем совокупность уравнений возмущенного движения мы будем называть часто просто *системой*. Таким образом, уравнения (1.16) определяют *неавтономную*, а уравнения (1.17) *автономную* системы (уравнений возмущенного движения).

Форма дифференциальных уравнений возмущенного движения (1.16) или (1.17) называется *нормальной*, а движения, определяемые этими уравнениями, называются *неустановившимися* и *установившимися* движениями соответственно.

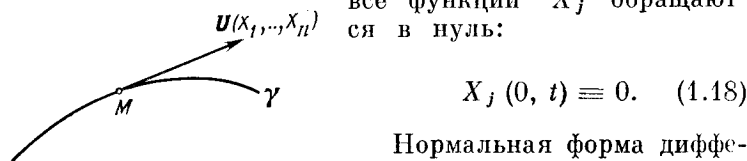
В дальнейшем для сокращения записи совокупность отклонений x_1, \dots, x_n будем часто обозначать одной буквой x (в главе V этому будет дано смысловое обоснование). В соответствии с этим для автономной системы будем иметь

$$X_j = X_j(x_1, \dots, x_n) = X_j(x),$$

а для неавтономной системы

$$X_j = X_j(x_1, \dots, x_n, t) = X_j(x, t).$$

Из вывода уравнений возмущенного движения видно, что при $x = 0$ (то есть при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$) все функции X_j обращаются в нуль:



$$X_j(0, t) \equiv 0. \quad (1.18)$$

Рис. 1.3

Нормальная форма дифференциальных уравнений возмущенного движения допускает простую геометрическую интерпретацию. Действительно, как уже отмечалось, в возмущенном движении изображающая точка M описывает в пространстве x_1, \dots, x_n некоторую траекторию γ . Скорость U движения точки M направлена по касательной к этой траектории, а ее проекции определяются равенствами ¹⁾

$$U_1 = \frac{dx_1}{dt}, \dots, U_n = \frac{dx_n}{dt}$$

¹⁾ Если e_1, \dots, e_n — единичные векторы ортогональной системы Ox_1, \dots, x_n , то разложение любого вектора a по координатным осям в n -мерном пространстве имеет вид

$$a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n,$$

где a_1, \dots, a_n — проекции вектора a на соответствующие оси. Модуль a вектора a определяется равенством

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2},$$

производная da/dt вектора a будет

$$\frac{da}{dt} = \frac{da_1}{dt} e_1 + \dots + \frac{da_n}{dt} e_n,$$

а ее проекции

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_1 = \frac{da_1}{dt}, \dots, \left(\frac{da}{dt}\right)_n = \frac{da_n}{dt}.$$

Радиус-вектор r изображающей точки M равен

$$r = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

а ее скорость

$$u = \frac{dr}{dt} = \frac{dx_1}{dt} e_1 + \dots + \frac{dx_n}{dt} e_n.$$

или, пользуясь уравнениями (1.16),

$$U_1 = X_1, \dots, U_n = X_n. \quad (1.19)$$

Следовательно, правые части нормальных уравнений возмущенного движения (1.16) равны проекциям скорости U изображающей точки M (рис. 1.3).

В заключение отметим, что при решении конкретных задач уравнения возмущенного движения можно не приводить к нормальной форме (1.16) или к виду (1.12), в частности, их можно представить как одно или несколько уравнений высшего порядка.

§ 1.3. Примеры на составление уравнений возмущенного движения

Поясним общие методы составления дифференциальных уравнений возмущенного движения на трех примерах.

Пример 1. Дифференциальные уравнения возмущенного движения конического маятника. Рассмотрим материальную точку M массой m , подвешенную на невесомой нити OM к точке O (сферический маятник). Будем считать, что длина нити равна l . Положение точки M будем определять углами ψ и θ , значения которых видны на рис. 1.4 (ось Oz вертикальна, ось x' параллельна неподвижной горизонтальной оси x , прямая MN перпендикулярна оси Oz).

Кинетическая и потенциальная энергии сферического маятника определяются равенствами

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta),$$

$$\Pi = mgl(1 - \cos \theta). \quad (1.20)$$

Пользуясь уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \psi},$$

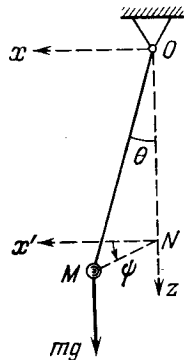


Рис. 1.4

составим дифференциальные уравнения движения сферического маятника:

$$ml^2 \ddot{\theta} - ml^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgl \sin \theta = 0,$$

$$ml^2 \ddot{\psi} \sin^2 \theta + 2ml^2 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta = 0,$$

или, после очевидных упрощений,

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} \sin \theta + \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta, \\ \ddot{\psi} &= -2\dot{\theta}\dot{\psi} \operatorname{ctg} \theta.\end{aligned}\quad (1.21)$$

Положим

$$\theta = y_1, \quad \dot{\theta} = y_2, \quad \dot{\psi} = y_3. \quad (1.22)$$

Теперь уравнения движения сферического маятника принимают вид уравнений (1.1):

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\frac{g}{l} \sin y_1 + y_3^2 \sin y_1 \cos y_1, \\ \dot{y}_3 &= -2y_2 y_3 \operatorname{ctg} y_1.\end{aligned}\quad (1.23)$$

Рассмотрим движение маятника по горизонтально расположенной окружности с постоянной скоростью (*конический маятник*). В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned}0 &= y_1 = f_1(t) = \alpha = \text{const}, \\ \dot{\theta} &= y_2 = f_2(t) = 0, \\ \dot{\psi} &= y_3 = f_3(t) = \omega = \text{const}.\end{aligned}\quad (1.24)$$

Подставив эти значения для y_1 , y_2 и y_3 в (1.23), получим из второго уравнения (первое и третье уравнения обращаются в тождества)

$$\omega^2 \cos \alpha = \frac{g}{l}. \quad (1.25)$$

Конечно, это условие, которому должны удовлетворять параметры конического маятника, можно получить из элементарных соображений, например, применяя принцип Даламбера.

За невозмущенное движение примем движение, определяемое равенствами (1.24). В соответствии с общей теорией положим

$$y_1 = \alpha + x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = \omega + x_3 \quad (1.26)$$

и внесем эти значения для y_1 , y_2 и y_3 в уравнения (1.23). Учитывая, что α и ω — постоянные, получим дифференциальные уравнения возмущенного движения в нормальной форме (1.17):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(\alpha + x_1) + (\omega + x_3)^2 \sin(\alpha + x_1) \cos(\alpha + x_1), \\ \dot{x}_3 &= -2x_2(\omega + x_3) \operatorname{ctg}(\alpha + x_1).\end{aligned}\quad (1.27)$$

Легко видеть, что правые части этих уравнений обращаются при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ в нули (во втором уравнении нужно учесть равенство (1.25)), т. е. они удовлетворяют условиям (1.18). Разлагая правые части в ряды по степеням x_1 , x_2 и x_3 и ограничиваясь членами первого порядка малости, получим уравнения первого

приближения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 \sin^2 \alpha \cdot x_1 + \omega \sin 2\alpha \cdot x_3, \\ \dot{x}_3 &= -2\omega \operatorname{ctg} \alpha \cdot x_2, \end{aligned} \quad (1.28)$$

при этом учтено равенство (1.25).

В следующем примере будет показано, что при составлении дифференциальных уравнений возмущенного движения можно не прибегать к уравнениям движения системы в форме (1.1).

Пример 2. Дифференциальные уравнения возмущенного движения центра масс искусственного спутника Земли. Будем предполагать, что на спутник действуют только силы притяжения Земли, приводящиеся к одной равнодействующей F , приложенной к центру масс спутника, причем модуль ее определяется законом всемирного тяготения:

$$F = \mu \frac{m}{r^2}. \quad (1.29)$$

Здесь $\mu = gR^2 = fM$ — гравитационный параметр Земли (R — ее радиус, g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли, M — ее масса, f — гравитационная постоянная), $r = OC$ — расстояние от центра Земли O до центра масс C спутника, m — его масса.

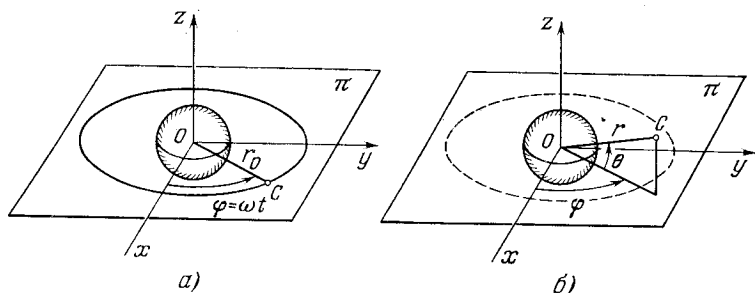


Рис. 1.5

Рассмотрим равномерное движение центра масс искусственного спутника по круговой орбите радиуса r_0 , лежащей в плоскости π (рис. 1.5, а). Такое движение называется также стационарным движением искусственного спутника Земли (см. § 3.4). Параметры, определяющие стационарное движение спутника, должны удовлетворять следующему условию, непосредственно вытекающему из второго закона Ньютона ($mr_0\omega^2 = \mu m/r_0^2$):

$$\omega^2 r_0^3 = \mu, \quad (1.30)$$

где $\omega = \dot{\varphi} = \text{const}$ — угловая скорость вращения радиуса-вектора r_0 спутника в стационарном движении.

Предположим, что на это движение спутника Земли наложены некоторые возмущения (это равносильно тому, что при отделении спутника от последней ступени ракеты незначительно нарушены условия, которые должны были обеспечить движение искусственного спутника по круговой орбите радиуса r_0 , лежащей в плоскости π). В результате наложенных возмущений спутник начнет совершать возмущенное движение, в частности, орбита уже не будет круговой, движение не будет происходить в плоскости π , угловая скорость $\dot{\varphi}$ вращения радиуса-вектора не будет равна $\sqrt{\mu/r_0^3}$.

Для составления уравнений возмущенного движения спутника построим систему отсчета $Oxyz$, координатная плоскость xy которой совмещена с плоскостью орбиты в стационарном движении, т. е. с плоскостью π . Положение центра масс C искусственного спутника в возмущенном движении будем определять сферическими координатами r, φ, θ (рис. 1.5, б). Кинетическая T и потенциальная Π энергии спутника определяются равенствами (в сделанных предположениях вращательное движение спутника не влияет на движение его центра масс и, следовательно, из рассмотрения может быть исключено):

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad \Pi = -\mu \frac{m}{r}. \quad (1.31)$$

Имея в виду изучить устойчивость стационарного движения искусственного спутника относительно величин $r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$, составим уравнения возмущенного движения. Для этого воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (q_j = r, \theta, \varphi).$$

Составим сначала уравнение для координаты r . Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 + m r \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{\mu m}{r^2}.$$

Внеся полученные выражения в уравнение Лагранжа для координаты r , найдем

$$m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 - m r \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2 = -\mu \frac{m}{r^2},$$

или, сократив на массу m и положив $r = r_0 + x$ и $\dot{\varphi} = \omega + y$, получим уравнения возмущенного движения искусственного спутника (уравнения для θ и φ получены аналогично)

$$\ddot{x} - (r_0 + x) \dot{\theta}^2 - (r_0 + x) \cos^2 \theta \cdot (\omega + y)^2 = - \frac{\mu}{(r_0 + x)^2}, \\ (r_0 + x) \ddot{\theta} + 2\dot{x}\dot{\theta} + (r_0 + x) \cos \theta \sin \theta \cdot (\omega + y)^2 = 0, \quad (1.32) \\ \frac{d}{dt} [(r_0 + x)^2 \cos^2 \theta \cdot (\omega + y)] = 0.$$

Прежде чем привести эти три дифференциальных уравнения возмущенного движения спутника Земли (два из них второго порядка, а одно — первого) к нормальному виду, введем для общности новые обозначения:

$$x = x_1, \quad \dot{x} = x_2, \quad \theta = x_3, \quad \dot{\theta} = x_4, \quad y = x_5.$$

Внеся эти выражения в уравнения (1.32) и решив их относительно производных, получим дифференциальные уравнения возмущенного движения в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= (r_0 + x_1) [x_4^2 + \cos^2 x_3 (\omega + x_5)^2] - \frac{\mu}{(r_0 + x_1)^2}, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4, \\ \frac{dx_4}{dt} &= -2 \frac{x_2 x_4}{r_0 + x_1} - \frac{1}{2} (\omega + x_5)^2 \sin 2x_3, \\ \frac{dx_5}{dt} &= -2 \frac{x_2}{r_0 + x_1} (\omega + x_5) + 2x_4 (\omega + x_5) \operatorname{tg} x_3. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Легко видеть, что правые части этих уравнений обращаются в нуль при $x_1 = \dots = x_5 = 0$, т. е. они удовлетворяют условиям (1.18) (во втором уравнении нужно учесть равенство (1.30)). Разлагая правые части в ряды и ограничиваясь членами первого порядка относительно x_1, \dots, x_5 , получим дифференциальные уравнения первого приближения возмущенного движения искусственного спутника Земли:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 3\omega^2 x_1 + 2r_0 \omega x_5, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4, \\ \frac{dx_4}{dt} &= -2\omega^2 x_3, \\ \frac{dx_5}{dt} &= -2 \frac{\omega}{r_0} x_2. \end{aligned} \quad (1.34)$$

При выводе этих уравнений было принято во внимание равенство (1.30).

Пример 3. Уравнения возмущенного движения линейных систем. Рассмотрим важный для приложений случай, когда движение системы описывается неоднородными линейными дифференциальными уравнениями

$$\dot{y}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} y_j + F_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.35)$$

где a_{kj} и F_k — заданные функции времени (в частности, они могут быть постоянными числами).

Предположим, что требуется определить устойчивость какого-либо движения этой системы $f_1(t), \dots, f_n(t)$. Воспользуемся равенствами (1.5): $y_k = f_k + x_k$. После подстановки в уравнения (1.35) получим

$$\dot{f}_k + a_{kj}f_j + \sum_j a_{kj}x_j + F_k(t).$$

Учитывая, что f_1, \dots, f_n удовлетворяют уравнениям (1.35), найдем

$$\dot{x}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.36)$$

Таким образом, уравнения возмущенного движения линейной неоднородной системы представляют однородную часть уравнений движения (1.35). Анализ последних и решает вопрос об устойчивости движения $y_1 = f_1(t), \dots, y_n = f_n(t)$.

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА
(АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ)

§ 2.1. Функции Ляпунова. Критерий Сильвестра

Одним из наиболее эффективных методов исследования устойчивости движения является *прямой метод Ляпунова* (очень часто этот метод называется *вторым методом Ляпунова*). В этой главе прямой метод будет изложен для автономных систем (неавтономные системы рассматриваются в гл. VII).

Изучение прямого метода начнем с рассмотрения некоторых *вещественных функций* $V(x) = V(x_1, \dots, x_n)$, определенных в области

$$\sum x_j^2 \leq \mu, \quad (2.1)$$

где μ — постоянное положительное число.

Предполагается, что в области (2.1) эти функции *однозначны, непрерывны* и обращаются в нуль, когда все x_1, \dots, x_n равны нулю, т. е.

$$V(0) = 0. \quad (2.2)$$

Если в области (2.1) функция V кроме нуля может принимать значения только одного знака, то она называется *знакопостоянной* (соответственно *положительной* или *отрицательной*). Если же знакопостоянная функция обращается в нуль *только в том случае*, когда все x_1, \dots, x_n равны нулю, то функция V называется *знакоопределенной* (соответственно *определенно-положительной* или *определенно-отрицательной*). Функции, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, называются *знакопеременными* функциями. Введенные таким образом функции V , используемые для исследования устойчивости движения, называются *функциями Ляпунова*.

Рассмотрим два примера.

1. Функция

$$V = x_1^2 + 5x_2^4$$

при x_1 и x_2 , не равных нулю одновременно, принимает положительные значения и обращается в нуль только при $x_1 = x_2 = 0$. Следовательно, эта функция определенно-положительна. В пространстве x_1, x_2, V поверхность $V = x_1^2 + 5x_2^4$ расположена по одну сторону от плоскости x_1, x_2 , касаясь ее только в начале координат (рис. 2.1, а).

2. Функция

$$V = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$$

не может принимать отрицательные значения, но в нуль она обращается не только в начале координат $x_1 = x_2 = 0$, но и на прямой

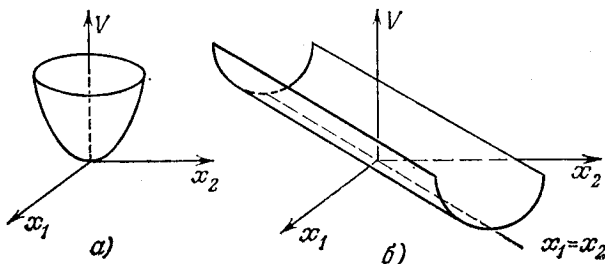


Рис. 2.1

$x_1 = x_2, V = 0$. Следовательно, эта функция положительна, но не определенно-положительна. В этом случае поверхность $V = (x_1 - x_2)^2$ в пространстве x_1, x_2, V также находится по одну сторону плоскости x_1, x_2 , но касается ее не в одной точке, а по прямой $x_1 = x_2, V = 0$ (рис. 2.1, б).

Из определения и этого примера видно, что положительную (отрицательную) функцию в указанном смысле можно назвать также неотрицательной (неположительной) функцией. Из сделанных определений видно, что знакоопределенная функция имеет при $x_1 = \dots = x_n = 0$ экстремум (минимум для определенно-положительной функции и максимум для определенно-отрицательной функции). Знакопостоянная же функция в начале координат экстремума не имеет, так как в окрестности начала координат имеются точки, в которых функция V принимает значения, равные $V(0) = 0$ (во втором примере эти точки расположены на прямой $x_1 = x_2, V = C$).

Остановимся на признаках, с помощью которых можно определить характер функции V . Прежде всего заметим, что знакоопределенная функция V должна содержать все переменные x_1, \dots, x_n . Действительно, пусть, на-

пример, функция V не содержит переменную x_n . Тогда при $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$, $x_n \neq 0$ функция V будет обращаться в нуль, что недопустимо для знакоопределенных функций.

Пусть знакоопределенная функция $V = V(x)$ непрерывна вместе со своими производными. Тогда при $x_1 = \dots = x_n = 0$ она будет иметь изолированный экстремум и, следовательно, все частные производные первого порядка, вычисленные в этой точке, будут равны нулю (необходимые условия существования экстремума)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.3)$$

Разложим функцию V в ряд Маклорена по степеням x_1, \dots, x_n :

$$V = V(0) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 x_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\right)_0 x_k x_j + \dots,$$

где точками обозначены члены высшего порядка. Учитывая соотношения (2.2) и (2.3), получим

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} x_k x_j + \dots \quad (2.4)$$

Здесь постоянные числа $c_{kj} = c_{jk}$ определены равенствами

$$c_{kj} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\right)_0. \quad (2.5)$$

Из формулы (2.4) видно, что разложение знакоопределенной функции V в ряд по степеням x_1, \dots, x_n не содержит членов первой степени.

Предположим, что квадратичная форма

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} x_k x_j \quad (2.6)$$

принимает положительные значения и в нуль обращается только при $x_1 = \dots = x_n = 0$. Тогда вне зависимости от членов высшего порядка при достаточно малых по модулю x_j функция V будет принимать также положительные значения и в нуль она будет обращаться только при $x_1 = \dots = x_n = 0$. Таким образом, если квадратич-

ная форма (2.6) определенно-положительна, то и функция V будет определенно-положительной.

Рассмотрим матрицу коэффициентов квадратичной формы (2.6)

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

и составим из нее n главных диагональных миноров (в матрице (2.7) они окантованы пунктиром)

$$\Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.8)$$

В линейной алгебре доказывается следующий критерий Сильвестра [9, 14]: для того чтобы квадратичная форма с вещественными коэффициентами была определенно-положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ матрицы ее коэффициентов были положительны, т. е.

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0. \quad (2.9)$$

Из сказанного следует, что критерий Сильвестра (2.9) для квадратичной части функции V является достаточным (но не необходимым) условием определенной положительности самой функции V .

Если функция V определенно-отрицательна, то функция $-V$ будет определенно-положительной. Поэтому достаточным условием определенной отрицательности функции V будет критерий Сильвестра (2.9) для матрицы $-C$. Этот критерий имеет вид

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \dots, \quad (2.10)$$

т. е. определители Δ_j должны последовательно чередовать знак, причем знак $\Delta_1 = c_{11}$ должен быть отрицательным.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$V = 1 + \sin^2 x_1 - \cos(x_1 - x_2).$$

Разложим эту функцию в ряд по степеням x_1 и x_2 . Имеем

$$\sin^2 x_1 = x_1^2 + \dots, \quad \cos(x_1 - x_2) = 1 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \dots,$$

где точками обозначены члены, содержащие x_1 и x_2 в степени выше второй. Внося эти выражения для $\sin^2 x_1$ и $\cos(x_1 - x_2)$ в функцию V , получим

$$V = 1 + x_1^2 - 1 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \dots$$

или, упрощая,

$$V = \frac{1}{2}(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + \dots$$

Составим матрицу коэффициентов квадратичной части функции V (по главной диагонали стоят коэффициенты при квадратах переменных, элементы c_{12} и c_{21} равны половине коэффициента при произведении x_1x_2):

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим теперь главные диагональные миноры:

$$\Delta_1 = 3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Отсюда следует, что условие Сильвестра выполнено (все $\Delta_i > 0$) и поэтому рассматриваемая функция V в окрестности нуля определено-положительна. Заметим, что на всей плоскости x_1x_2 функция V только положительна, так как при $x_1 = x_2 = \pi n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) она обращается в нуль.

Может оказаться, что разложение знакоопределенной функции V в ряд по степеням x_1, \dots, x_n начинается не с членов второго, а с членов более высокого порядка. К сожалению, общих приемов исследования функции на знакоопределенность в этом случае нет, но можно указать на один необходимый признак: *разложение знакоопределенной функции в ряд по степеням x_1, \dots, x_n не может начинаться с членов нечетной степени* (для членов первой степени это было уже показано (см. примечание к формуле (2.4)). Действительно, пусть разложение знакоопределенной функции V в ряд по степеням x_1, \dots, x_n начинается с членов $(2k + 1)$ -й степени, где k — целое положительное число. Положим $x_2 = \dots = x_n = x_1$. При этих значениях x_i функция V примет вид

$$V = Ax_1^{2k+1} + Bx_1^{3k+2} + \dots$$

Здесь A и B постоянные, а точками обозначены члены порядка выше $2k + 2$. При x_1 , достаточно малом по мо-

дулю, знак функции V будет совпадать со знаком первого члена. Но этот член меняет знак при изменении знака x_1 . Следовательно, при $A \neq 0$ функция V будет знакопеременной, что доказывает сделанное замечание.

Перейдем к изучению свойств функции V . Покажем прежде всего, что если функция V знакоопределенная, то поверхность $V(x_1, \dots, x_n) = c$ замкнута.

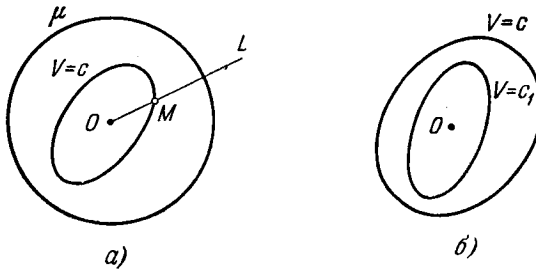


Рис. 2.2

При доказательстве, не нарушая общности, можно считать, что функция V определенно-положительна. Возьмем сферу $\Sigma x_j^2 = \mu$ и пусть l — наименьшее значение функции V на этой сфере, так что на сфере μ функция V удовлетворяет неравенству

$$V_\mu \geq l.$$

Число l больше нуля, так как функция V определенно-положительна и, следовательно, на сфере μ она не может принимать нулевые или отрицательные значения.

Построим поверхность $V = c$, выбрав число $c < l$. Будем двигаться из начала координат O по произвольной прямой OL до сферы μ (рис. 2,2, а). При этом перемещении функция V будет меняться от нуля до некоторого числа V_μ , большего c (так как $V_\mu \geq l > c$). Следовательно, в силу непрерывности в некоторой промежуточной точке M функция V принимает значение, равное c , т. е. прямая OL пересекает в этой точке поверхность $V = c$. Так как прямая OL произвольна, то эта поверхность замкнута.

Заметим, что свойство замкнутости поверхности $V = c$ справедливо только для знакоопределенных функций. Для знакопостоянных или знакопеременных функций поверхности $V = c$ разомкнуты.

Из этого доказательства вытекают два следствия:

1. Если $|c| > |c_1|$, то поверхность $V = c_1$ находится внутри поверхности $V = c$, причем обе поверхности не имеют общих точек (функции V по определению однозначны) (рис. 2.2, б).

2. Если изображающая точка M перемещается в сторону возрастания определенно-положительной функции V , то траектория этой точки пересекает поверхности

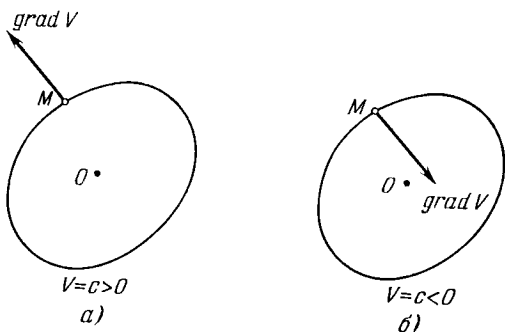


Рис. 2.3

$V = c$ изнутри наружу, а при движении в сторону убывания функции V — снаружи внутрь (для определенно-отрицательной функции картина обратная). Конечно, в общем случае все эти свойства справедливы только в достаточно малой окрестности нуля.

Выберем на поверхности $V(x) = c$ произвольную точку M и вычислим в этой точке вектор $\text{grad } V$:

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} e_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} e_n, \quad (2.14)$$

где e_1, e_2, \dots, e_n — орты осей x_1, x_2, \dots, x_n .

Известно, что вектор $\text{grad } V$ направлен по нормали к поверхности $V = c$ в точке M в сторону возрастания функции V . Из этого следует, что вектор $\text{grad } V$ направлен во внешнюю часть поверхности $V = c$, если функция V определенно-положительна (рис. 2.3, а), и внутрь поверхности $V = c$, если функция V определенно-отрицательна (рис. 2.3, б).

Одновременно с функцией V будем рассматривать ее полную производную \dot{V} по времени t , взятую в пред-

положении, что переменные x_j удовлетворяют дифференциальным уравнениям возмущенного движения (1.17). Имеем

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n,$$

или, учитывая уравнения (1.17),

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n. \quad (2.12)$$

Напомним теперь, что величины X_j равны проекциям скорости \mathbf{U} изображающей точки M , а производные $\frac{\partial V}{\partial x_j}$ — проекциям $\text{grad } V$. Поэтому правая часть равенства (2.12) равна скалярному произведению векторов \mathbf{U} и $\text{grad } V$ ¹⁾, т. е.

$$\dot{V} = \mathbf{U} \cdot \text{grad } V. \quad (2.13)$$

Знание производной \dot{V} функции V позволяет наглядно проследить за движением изображающей точки. Действительно, пусть в данный момент времени t изображающая точка M занимает некоторое положение. Выберем какую-нибудь определенно-положительную функцию V и построим поверхность $V = c$, проходящую через точку M . Затем по формуле (2.12) вычислим в этой точке производную \dot{V} функции V . Рассмотрим три возможных случая.

1. В данном положении точки M производная \dot{V} отрицательна

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} < 0.$$

Из этого следует, что функция V убывает, т. е. точка M переходит внутрь поверхности $V = c$ (следствие 2, с. 35). Этот вывод можно получить и из равенства (2.13). Так как $\dot{V} < 0$, то из формулы (2.13) заключаем, что угол между скоростью \mathbf{U} изображающей точки M и

¹⁾ Скалярное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} в n -мерном пространстве равно, так же как и в обычном трехмерном пространстве, сумме произведений одноименных проекций

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Угол между двумя векторами определяется равенством

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha,$$

где a и b — модули векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Угол α острый, если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$, прямой, если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, и тупой при $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$.

градиентом функции V тупой. Учитывая, что для определенно-положительной функции V вектор $\text{grad } V$ совпадает с внешней нормалью к поверхности $V = c$, заключаем, что вектор U направлен внутрь этой поверхности. Иначе говоря, траектория изображающей точки M пересекает поверхность $V = c$ снаружи внутрь (рис. 2.4, а).

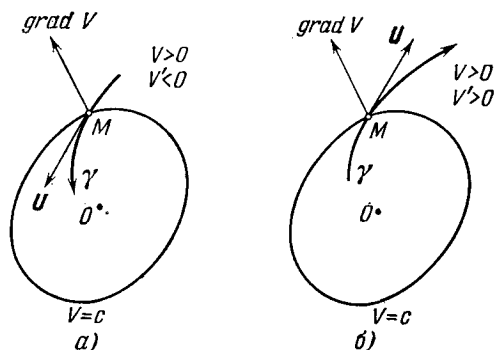


Рис. 2.4

2. В данном положении точки M производная $\dot{V} = 0$. Скалярное произведение $U \cdot \text{grad } V$ равно нулю, угол между этими векторами прямой, траектория изображающей точки касается поверхности $V = c$ (в частности, она может целиком лежать на этой поверхности).

3. В данном положении $\dot{V} > 0$. Функция V возрастает, траектория изображающей точки пересекает поверхность $V = c$ изнутри наружу (угол между векторами U и $\text{grad } V$ острый) (рис. 2.4, б).

§ 2.2. Теорема Ляпунова об устойчивости движения

Теорема. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V , производная которой \dot{V} в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с V , или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Доказательство. Выберем произвольное, достаточно малое положительное число $\varepsilon > 0$ и построим сферу $\sum x_j^2 = \varepsilon$. Затем построим поверхность $V = c$, лежащую внутри сферы ε (рис. 2.5). Это можно всегда сделать,

так как функция V непрерывна и равна нулю в начале координат. Выберем теперь число δ настолько малым, чтобы сфера $\Sigma x_j^2 = \delta$ целиком лежала внутри поверхности $V = c$, не имея с ней общих точек. Покажем, что

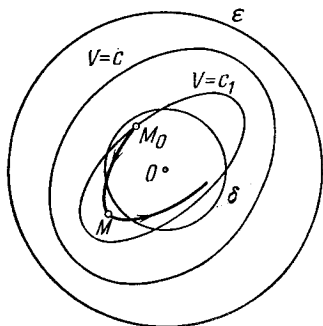


Рис. 2.5

изображающая точка M , начав движение из сферы δ , никогда не дойдет до сферы ε , что и будет служить доказательством устойчивости движения.

Не нарушая общности, можно считать, что функция V определенно-положительна (если $V < 0$, то можно взять функцию $-V$). По условию теоремы ее производная, вычисленная в силу уравнений возмущенного движения, будет отрицательной функцией

или тождественно равна нулю, т. е. $\dot{V} \leq 0$. Тогда из очевидного тождества

$$V - V_0 = \int_{t_0}^t \dot{V} dt, \quad (2.14)$$

где V_0 — значение функции V в начальной точке M_0 , будем иметь

$$V - V_0 \leq 0$$

или

$$V \leq V_0.$$

Из этого неравенства следует, что при $t \geq t_0$ изображающая точка M либо находится на поверхности $V = V_0 = c_1$ (при $\dot{V} \equiv 0$), либо находится внутри этой поверхности (рис. 2.5). Таким образом, изображающая точка M , начав движение из положения M_0 , находящегося внутри или на поверхности сферы δ , никогда не выйдет за пределы поверхности $V = c_1$ и тем более не сможет достигнуть поверхности сферы ε . Это доказывает теорему.

Доказательство теоремы можно проиллюстрировать чисто геометрическими соображениями. Из условия $\dot{V} \leq 0$ следует, что траектория изображающей точки M войдет внутрь поверхности $V = c_1$ или будет лежать на этой поверхности (см. окончание § 2.1, рис. 2.4 и 2.5). В дальнейшем траектория изображающей точки M не сможет

перейти во внешнюю часть поверхности $V = c_1$, так как по условию теоремы производная \dot{V} удовлетворяет неравенству $\dot{V} \leq 0$ во всех точках окрестности нуля (для выхода наружу из поверхности $V = c_1$ нужно, чтобы неравенство $\dot{V} > 0$ выполнялось хотя бы в одной точке).

Применение основных теорем прямого метода подробно будет рассмотрено в § 2.6 и § 2.7, а сейчас приведем небольшой пример чисто иллюстративного характера.

Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1x_2 - x_2^3.$$

Возьмем определенно-положительную функцию

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

и вычислим ее производную по времени в силу уравнений возмущенного движения. Имеем

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2.$$

Подставляя вместо \dot{x}_1 и \dot{x}_2 их значения из уравнений возмущенного движения, получим

$$\dot{V} = x_1(-x_1 + 3x_2^2) + x_2(-x_1x_2 - x_2^3) = -(x_1 - x_2^2)^2.$$

Так как функция V определенно-положительна, а ее производная \dot{V} — отрицательная функция, то на основании доказанной теоремы Ляпунова можно утверждать, что невозмущенное движение $x_1 = 0, x_2 = 0$ рассматриваемой системы устойчиво. В § 2.3 (с. 45), пользуясь другой теоремой, мы докажем более сильное утверждение, а именно, что это движение не просто, а асимптотически устойчиво.

§ 2.3. Теоремы об асимптотической устойчивости

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V , производная которой \dot{V} в силу этих уравнений была бы знакоопределенной функцией противоположного знака с V , то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Доказательство. Прежде всего заметим, что выполнены все условия теоремы Ляпунова об устойчивости движения и, следовательно, изображающая точка не выйдет из поверхности $V = c_1$ (рис. 2.5). Однако в теореме об асимптотической устойчивости условия более сильные — производная \dot{V} не может тождественно равняться нулю и даже более — в нуль она обращается только в начале координат (так как \dot{V} знакоопределенная, а не знако-

постоянная функция). Поэтому изображающая точка M сразу после начала движения входит внутрь поверхности $V = c_1$.

Не нарушая общности, будем, как и раньше, считать, что функция V определенно-положительна. По условию теоремы ее производная \dot{V} определенно-отрицательная функция. Из неравенства

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} < 0$$

следует, что функция V , оставаясь положительной, монотонно убывает. Это означает, что функция V имеет предел $c_2 \geq 0$. Иначе говоря, изображающая точка M стремится с внешней стороны к предельной поверхности $V = c_2$ (рис. 2.6).

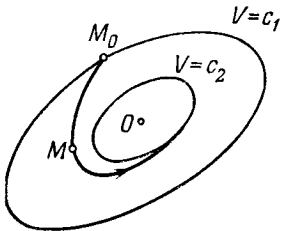


Рис. 2.6

Покажем, что $c_2 = 0$, т. е. поверхность $V = c_2$ вырождается в точку — начало координат. Предположим, что $c_2 \neq 0$. Тогда в замкнутой области, заключенной между поверхностями $V = c_1$ и $V = c_2$, функция \dot{V} по условию теоремы будет отрицательна. Обозначим че-

рез $-l$, где $l > 0$, ее точную верхнюю границу в этой области, причем $l \neq 0$, так как функция \dot{V} обращается в нуль только в начале координат. По определению точной верхней границы имеем

$$\dot{V} \leq -l.$$

Воспользуемся теперь тождеством (2.14)

$$V = V_0 + \int_{t_0}^t \dot{V} dt.$$

Учитывая соотношение $\dot{V} \leq -l$, получим неравенство

$$V \leq V_0 - \int_{t_0}^t l dt$$

или, интегрируя,

$$V \leq V_0 - l(t - t_0).$$

Согласно этому неравенству, функция V с течением времени делается отрицательной, что невозможно, так

как по условию теоремы функция V определенно-положительна. Полученное противоречие возникло из сделанного допущения, что $c_2 \neq 0$. Таким образом, $c_2 = 0$ и изображающая точка асимптотически стремится к началу координат, что доказывает теорему.

Проиллюстрируем теорему небольшим примером. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1x_2 - x_1^3 - \frac{1}{2}x_1x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 + x_1x_2 + x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2^2. \end{aligned}$$

Возьмем функцию V в следующей форме:

$$V = \frac{1}{2}(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2).$$

Эта функция определенно-положительна (условие Сильвестра для нее проверялось на с. 33). Вычислим полную производную по времени от этой функции:

$$\dot{V} = (3x_1 - x_2)\dot{x}_1 - (x_1 - x_2)\dot{x}_2.$$

Внесем сюда значения \dot{x}_1 и \dot{x}_2 из уравнений возмущенного движения и сгруппируем члены $\dot{V} = -3x_1^4 + 2x_1^3x_2 - 2x_2^3$. Составим матрицу коэффициентов этой функции, считая за переменные x_1^2 и x_2 :

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Имеем

$$\Delta_1 = -3 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 > 0.$$

Выполнен критерий (2.10), и, следовательно, производная \dot{V} — определенно-отрицательная функция относительно x_1^2 и x_2 (тем самым и относительно x_1 и x_2). На основании последней теоремы Ляпунова невозмущенное движение ($x_1 = 0, x_2 = 0$) асимптотически устойчиво.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости предъявляет очень высокие требования к функции V и к ее производной \dot{V} (они должны быть знакоопределенными функциями разных знаков). Н. Н. Красовский показал, что требования, налагаемые на производную \dot{V} , могут быть ослаблены.

Пусть производная $\dot{V}(x)$ функции $V(x)$, вычисленная в силу уравнений возмущенного движения (1.17), является не знакоопределенной, а только знакопостоянной функцией переменных x . Обозначим через K многообразие (множество, совокупность) точек из области (2.1),

в котором $\dot{V} = 0$, причем в это многообразие не включается начало координат $x = 0$, где $\dot{V} = 0$ всегда. Многообразие K может представлять поверхность, линию, их комбинацию и т. п.

Теорема Красовского об асимптотической устойчивости. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения (1.17) можно найти определенно-положительную в области (2.1) функцию V такую, что ее производная \dot{V} удовлетворяет в этой области двум условиям:

- 1) $V < 0$ вне K ,
- 2) $\dot{V} = 0$ на K ,

где K — многообразие точек, не содержащее целых траекторий системы при $0 \leq t < \infty$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

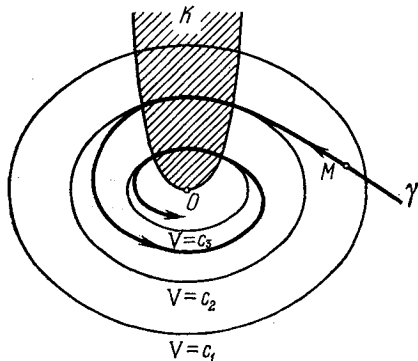


Рис. 2.7

Строгое аналитическое доказательство этой теоремы можно найти в книге Н. Н. Красовского [27] и в третьем дополнении редактора 2-го издания книги И. Г. Малкина [37]. Мы же ограничимся наглядной геометрической иллюстрацией теоремы.

Обозначим через M изображающую точку дифференциальных уравнений (1.17) возмущенного движения. По условию теоремы во всех точках окрестности нуля $\dot{V} \leq 0$ ($\dot{V} < 0$ вне K и $\dot{V} = 0$ на K). Из этого следует, что траектория γ изображающей точки M в области (2.1) не может пересечь поверхность $V = c$ изнутри наружу (см. с. 35).

Если точка M находится вне многообразия K , то ее траектория γ будет пересекать замкнутые поверхности $V = c_j$ снаружи внутрь. Действительно, по условию теоремы функция V определенно-положительна, а вне K производная $\dot{V} < 0$ (рис. 2.7¹⁾). Предположим теперь, что при своем движении изображающая точка M попала на многообразие K . Очевидно, что на этом многообразии

¹⁾ На рис. 2.7 многообразие K имеет условное изображение.

точка M движется по поверхности $V = c_2$ (на K производная $\dot{V} = 0$). Так как многообразию K не содержит целых траекторий системы, то точка M должна покинуть это многообразие, причем в месте схода траектория γ , касаясь поверхности $V = c_2$, войдет внутрь нее (ибо вне K она пересекает эти поверхности снаружи внутрь — см. рис. 2.7).

В дальнейшем точка M может снова попасть на многообразие K и будет двигаться по новой поверхности $V(x) = c_3$, расположенной ближе к началу координат,

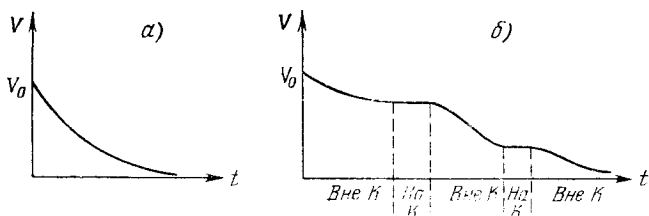


Рис. 2.8

чем поверхность $V(x) = c_2$ ($c_3 < c_2$, так как после схода точки M с поверхности $V = c_2$ производная $\dot{V} < 0$ и, следовательно, функция V убывает). Этот процесс может неоднократно повторяться, причем изображающая точка M будет неограниченно приближаться к началу координат (строгое доказательство теоремы сводится по существу к аналитическому описанию этого процесса).

Из приведенного обоснования теоремы Красовского видно, в чем состоит отличие в поведении функции V в условиях его теоремы от поведения этой функции в условиях теоремы Ляпунова. Для асимптотической устойчивости теорема Ляпунова требует, чтобы при $t \rightarrow \infty$ функция V стремилась к нулю монотонно (рис. 2.8, а); Красовский ослабил это условие и показал, что для асимптотической устойчивости функция V может стремиться к нулю не монотонно, а ступенчато (на рис. 2.8, б горизонтальные участки графика функции V соответствуют нахождению изображающей точки M на многообразии K).

Остановимся кратко на определении условий, при выполнении которых многообразие K не будет содержать целых траекторий дифференциальных уравнений возмущенного движения (1.7).

Выбрав определенно-положительную функцию V , вычислим ее производную \dot{V} . Предположим, что производная не определенно-отрицательная, а просто отрицательная функция, т. е. она может принимать помимо отрицательных также и нулевые значения. Совокупность тех значений x_1, \dots, x_n , при которых производная \dot{V} обращается в нуль (кроме начала координат) определяет многообразие K . На вопрос, содержит или не содержит это многообразие

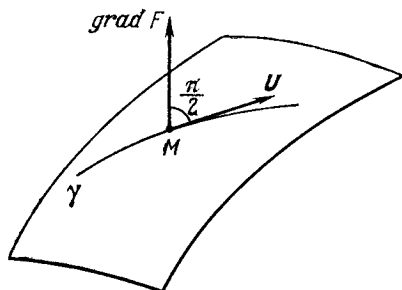


Рис. 2.9

образе целые траектории уравнений (1.17), можно во многих случаях ответить непосредственной проверкой. Для этого достаточно внести уравнение многообразия (если его можно написать в явном виде) в дифференциальные уравнения возмущенного движения. Если при этом уравнения обращаются в тождества, то много-

образе K содержит целые траектории; в противном случае не содержит.

В тех случаях, когда многообразие K представляет некоторую поверхность

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

достаточно составить скалярное произведение $U \cdot \text{grad } F$, где U — скорость изображающей точки M .

Если это произведение тождественно равно нулю, то скорость U будет все время перпендикулярна к $\text{grad } F$, т. е. к нормали поверхности $F = 0$. Это означает, что траектория γ изображающей точки M лежит всеми своими точками на этой поверхности (рис. 2.9). Таким образом, для того чтобы целые траектории дифференциальных уравнений возмущенного движения (1.17) не принадлежали поверхности $F = 0$, достаточно, чтобы скалярное произведение $U \cdot \text{grad } F$ не равнялось нулю тождественно [37]

$$U \cdot \text{grad } F = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial F}{\partial x_j} \neq 0. \quad (2.15)$$

Пример. В § 2.2 были рассмотрены следующие дифференциальные уравнения возмущенного движения:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1x_2 - x_2^3.$$

Определенно-положительная функция

$$V = 1/2(x_1^2 + x_2^2)$$

имеет в силу уравнений возмущенного движения отрицательную производную

$$\dot{V} = -(x_1 - x_2^3)^2.$$

Так как производная \dot{V} не определено-отрицательная, а просто отрицательная функция, то теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости применить нельзя. Попробуем воспользоваться теоремой Красовского. Множество K найдем, приравняв производную \dot{V} к нулю:

$$F = x_1 - x_2^3 = 0$$

(на плоскости x_1, x_2 это парабола).

Составим скалярное произведение (2.15)

$$U \cdot \text{grad } F = X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

или, подставляя соответствующие величины и учитывая, что на K $x_1 = x_2^3$,

$$U \cdot \text{grad } F = (-x_1 + 3x_2^3) \cdot 1 + (-x_1x_2 - x_2^3)(-2x_2) = 2x_2^3 + 4x_2^4.$$

Это выражение не обращается в нуль (точка $x = 0$, как обычно, исключается), поэтому многообразие $F = x_1 - x_2^3 = 0$ не содержит целых траекторий. Теперь видно, что выполнены все условия теоремы Красовского об асимптотической устойчивости. Действительно: 1) функция V определено-положительна; 2) производная \dot{V} на K равна нулю, а вне K она отрицательна; 3) многообразие K не содержит целых траекторий. Следовательно, рассматриваемое движение асимптотически устойчиво.

Теорема Ляпунова и обобщение Красовского устанавливают достаточные условия асимптотической устойчивости в малом, т. е. при малых начальных возмущениях. Е. А. Барбашину и Н. Н. Красовскому принадлежит теорема, определяющая достаточные условия асимптотической устойчивости при любых начальных возмущениях.

Теорема Барбашина — Красовского. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти определено-положительную функцию $V(x)$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \infty, \tag{2.16}$$

производная которой, вычисленная в силу этих уравнений, удовлетворяет при всех x двум условиям:

- 1) $\dot{V} < 0$ вне K ,
- 2) $\dot{V} = 0$ на K ,

где K — многообразие точек, не содержащее целых траекторий системы при $0 \leq t < \infty$, то невозмущенное движение $x = 0$ устойчиво в целом (символ $x \rightarrow \infty$ в равенстве (2.16) означает, что хотя бы одна координата x_k стремится к бесконечности по любому закону).

Не останавливаясь на доказательстве этой теоремы (см., например, [5, 6, 27]), покажем необходимость условия (2.16). При доказательстве теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости решающее значение имеют два свойства знакоопределенных функций V :

1) в окрестности нуля поверхности $V(x) = c$ замкнуты;

2) неограниченное стремление знакоопределенной функции $V(x)$ к нулю свидетельствует о стремлении изображающей точки к началу координат.

При рассмотрении устойчивости в целом необходимо учитывать, что координаты x_k могут принимать большие по модулю значения (хотя бы в начале движения). Поэтому, если условие (2.16) не выполнено, то может оказаться, что поверхности $V(x) = c$, замкнутые при достаточно малых $|x_k|$, будут разомкнуты при больших $|x_k|$. В результате значения функции $V(x)$ могут убывать, а изображающая точка не будет стремиться к началу координат.

Не вдаваясь в подробный анализ, поясним сказанное примером, взятым из [6]. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} - \frac{2y}{(1+x^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Функция

$$V = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2,$$

очевидно, определено-положительна, а ее производная, вычисленная в силу уравнений возмущенного движения,

$$\dot{V} = -4 \left[\frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \frac{y^2}{(1+x^2)^2} \right]$$

определенно-отрицательна на всей плоскости (x, y) .

На основании теоремы Ляпунова можно утверждать, что невозмущенное движение $x = 0, y = 0$ асимптотически устойчиво при малых начальных возмущениях. Однако теорему Барбашина — Крассовского об устойчивости движения в целом применить нельзя, так как условие (2.16) не выполнено. Действительно, при $x \rightarrow \infty$ и $y = a = \text{const}$ функция V стремится к $1 + a^2$, а не к бесконечности, как требует условие (2.16).

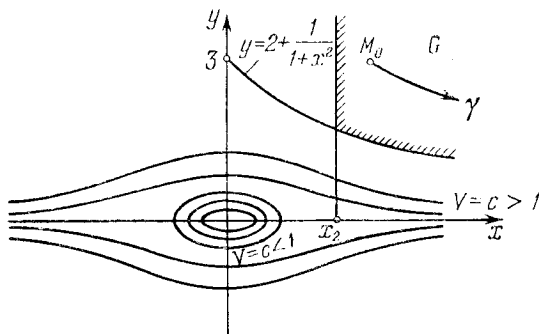


Рис. 2.10

Покажем, что система (2.17), асимптотически устойчивая в малом, не является устойчивой в целом. Для этого рассмотрим поверхности

$$V = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2 = c,$$

или, решая относительно y ,

$$y = \pm \sqrt{c - 1 + \frac{1}{1+x^2}}.$$

Отсюда видно, что при $0 < c < 1$ поверхности $V(x) = c$ будут замкнуты, а при $c \geq 1$ — разомкнуты (рис. 2.10).

Рассмотрим теперь кривую

$$y = 2 + \frac{1}{1+x^2} \tag{2.18}$$

и найдем угловой коэффициент касательной к этой кривой

$$k = y'_x = - \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

На кривой (2.18) дифференциальные уравнения возмущенного движения (2.17) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= - \frac{2x}{(1+x^2)^2} + 4 + \frac{2}{1+x^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= - \frac{2x}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} \left(4 + \frac{2}{1+x^2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда найдем угловой коэффициент касательной к траектории γ системы (2.17) в точках кривой (2.18)

$$k^* = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{x} \left(2 + \frac{1}{1+x^2}\right)}{4 + \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}}.$$

Сравнивая с выражением для k , получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k^*}{k} = \frac{1}{4} < 1.$$

Следовательно, найдется такое достаточно большое положительное число x_1 , что при всех $x \geq x_1$ будет выполняться неравенство

$$|k^*| < |k|$$

(из выражений для k^* и k видно, что при достаточно больших x оба коэффициента отрицательны).

Рассмотрим далее область G , определенную неравенствами (рис. 2.10)

$$x > x_2 \geq x_1, \quad y > 2 + \frac{1}{1+x^2}$$

где x_2 удовлетворяет соотношению

$$\frac{2x_2}{(1+x_2^2)^2} < 4. \quad (2.19)$$

Область G имеет следующие свойства.

1. Изображающая точка M системы (2.17), перемещаясь по интегральной кривой γ , не может пересечь кривую (2.18) изнутри наружу, так как для этого необходимо, чтобы в точке пересечения угловые коэффициенты удовлетворяли условию $|k^*| > |k|$, а при $x > x_1$ имеет место неравенство $|k^*| < |k|$.

2. Изображающая точка M системы (2.17), попав в область G , удаляется все время вправо от ее левой границы $x = x_2$ (рис. 2.10). В самом деле, при $x > x_2$ из неравенства (2.19) следует, что

$$\frac{2x}{(1+x^2)^2} < 4$$

(x_2 достаточно велико).

Теперь, пользуясь определением области G , из первого уравнения системы (2.17) последовательно получим

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2y > -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 4 + \frac{2}{1+x^2} > \frac{2}{1+x^2} > 0,$$

что доказывает возрастание абсциссы x изображающей точки M системы (2.17).

Из свойств 1 и 2 следует, что если начальная точка M_0 находится в G , то интегральная кривая не выйдет из этой области. Это свидетельствует об отсутствии устойчивости в целом.

§ 2.4. Теоремы о неустойчивости движения

Ляпунову принадлежат две теоремы о неустойчивости движения. В 30-х годах нашего столетия Четаев обобщил эти теоремы и доказал теорему, из которой как частный случай вытекают теоремы Ляпунова. Поэтому мы начнем с изложения теоремы Четаева.

Пусть вещественная непрерывная и однозначная функция $V(x)$ по-прежнему определена в области (2.1)

$$\sum x_k^2 \leq \mu,$$

где μ — постоянное положительное число.

Совокупность значений переменных x_1, \dots, x_n из этой области, удовлетворяющих неравенству

$$V(x) > 0,$$

называется *областью* $V > 0$, а поверхность $V = 0$ — *границей области* $V > 0$. Предполагается, как и прежде, что $V(0) = 0$, т. е. начало координат принадлежит границе области $V > 0$. Так, например, границей области $V > 0$ для функции

$$V = x_1 - x_2^2$$

будет парабола (рис. 2.11)

$$x_1 = x_2^2.$$

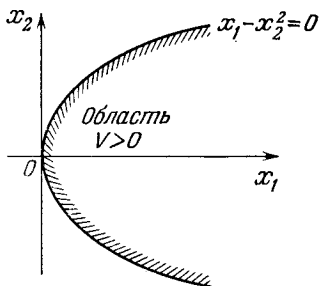


Рис. 2.11

Если функция V определено-положительна, то областью $V > 0$ будет вся окрестность нуля. Для отрицательных функций V область $V > 0$ не существует.

Теорема Четаева. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения позволяют найти функцию $V(x)$, для которой в сколь угодно малой окрестности нуля существует область $V > 0$, и если производная \dot{V} функции V , вычисленная в силу этих уравнений, положительна во всех точках области $V > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство. Возьмем положительное сколь угодно малое число ε и построим сферу $\sum x_k^2 = \varepsilon$ (конечно, $\varepsilon \leq \mu$). Чтобы обнаружить неустойчивость невозмущенного движения, достаточно заметить всего одну траекторию изоб-

ражающей точки M , выходящую за пределы сферы ε . Возьмем начальное положение точки M в области $V > 0$, причем точка M_0 может быть сколь угодно близка к началу координат, но не совпадать с ним. Так как по условию теоремы в области $V > 0$

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} > 0,$$

то функция V монотонно возрастает и, следовательно, для всех $t \geq t_0$ будем иметь

$$V(x) \geq V_0 > 0,$$

где V_0 значение функции V в точке M_0 .

Изображающая точка M , начав движение из M_0 , при своем дальнейшем движении не может пересечь границу области $V > 0$ (на границе $V = 0$, а в начальный момент $V_0 > 0$ и V возрастает монотонно). Предположим, что при дальнейшем движении изображающая точка M не выйдет за пределы сферы ε , т. е. находится все время внутри замкнутой области G (рис. 2.12)

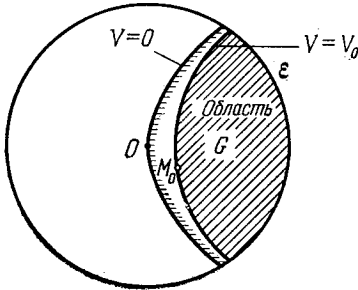


Рис. 2.12

$$\sum x_k^2 \leq \varepsilon, \quad V(x) \geq V_0.$$

Тогда функция V , как непрерывная и не зависящая от t явно, будет при всех $t \geq t_0$ ограничена, т. е. будет удовлетворять условию

$$V \leq L,$$

где L — некоторое положительное число.

В замкнутой области G производная \dot{V} положительна и также ограничена (положительна по условию теоремы, ограничена — так как непрерывна и не зависит от t явно). Поэтому в этой области производная \dot{V} имеет точную нижнюю границу l , причем $l > 0$. Если предположить, что изображающая точка M не выходит за пределы сферы ε и, следовательно, все время находится внутри области G , то при всех $t \geq t_0$ производная \dot{V} будет удовлетворять условию

$$\dot{V} \geq l > 0.$$

Пользуясь этим неравенством и соотношением (2.14), найдем

$$V \geq V_0 + l(t - t_0).$$

Отсюда следует, что с течением времени функция V неограниченно возрастает. Противоречивость полученных для V неравенств возникла из сделанного предположения, что изображающая точка не выйдет за пределы сферы ε . Таким образом, это предположение неверное, что доказывает теорему.

Как уже отмечалось, теорема Четаева является обобщением двух теорем Ляпунова о неустойчивости движения. Приведем одну из них.

Теорема Ляпунова о неустойчивости движения. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения позволяют найти функцию V , которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопределенной производной \dot{V} и могла бы принимать в окрестности нуля значения одного знака с \dot{V} , то невозмущенное движение неустойчиво.*

Действительно, по условию теоремы Ляпунова производная \dot{V} определенно-положительна во всех точках окрестности нуля (не нарушая общности, можно считать, что $\dot{V} > 0$) и, следовательно, она определенно-положительна и в той области, в которой функция V принимает положительные значения (область $V > 0$). Таким образом, выполнены все условия теоремы Четаева, что служит доказательством теоремы Ляпунова.

Обобщение Четаева состоит в том, что он ослабил условия Ляпунова, налагаемые на производную \dot{V} — достаточно, чтобы она была определенно-положительной не во всех точках окрестности нуля, как требует теорема Ляпунова, а только в области $V > 0$.

Другое ослабление требований, налагаемых на производную \dot{V} , содержится в следующей теореме.

Теорема Красовского о неустойчивости движения. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения (1.17) можно найти функцию V такую, что ее производная \dot{V} удовлетворяет условиям:*

- 1) $\dot{V} > 0$ вне K ,
- 2) $\dot{V} = 0$ на K ,

где K — многообразие точек, не содержащее целых траекторий при $0 \leq t < \infty$, и если при этом можно указать точки, лежащие в произвольной окрестности начала коор-

динат, такие, что в них $V > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Геометрическое обоснование этой теоремы в значительной своей части совпадает с аналогичным обоснованием теоремы Н. Н. Красовского об асимптотической устойчивости — см. § 2.3. Действительно, возьмем начальную точку $M_0(x_0)$ такую, чтобы в ней выполнялось условие $V(x_0) > 0$. Так как в этой точке $V_0 > 0$ и $\dot{V} > 0$ (предполагаем вначале, что M_0 не принадлежит многообразию K), то функция V будет возрастать, а изображающая точка M будет удаляться от начала координат. Если при своем движении изображающая точка M попадет на K , или M_0 принадлежит K , то вскоре она должна будет покинуть это многообразие (оно не содержит целых траекторий) и снова начнется удаление точки M от начала координат. Строгое доказательство этой теоремы можно найти в книге Н. Н. Красовского [27].

Рассмотрим небольшой пример. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + 2x_2^5, \quad \dot{x}_2 = x_1x_2^2.$$

Покажем, что невозмущенное движение $x_1 = x_2 = 0$ неустойчиво. Для этого возьмем функцию

$$V = x_1^3 - x_2^4.$$

Эта функция имеет область $V > 0$, состоящую из двух частей, ограниченных параболлами $x_1 = x_2^2$ и $x_1 = -x_2^2$ (рис. 2.13). Вычислим производную \dot{V} функции V в силу уравнений возмущенного движения

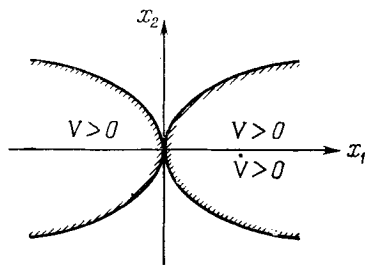


Рис. 2.13

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 - 4x_2^3\dot{x}_2$$

или, внося значения \dot{x}_1 и \dot{x}_2 и упрощая,

$$\dot{V} = 2x_1^3.$$

Так как эта производная положительна при всех $x_1 > 0$ и любых x_2 , то в правой части области $V > 0$ выполнены все условия теоремы Четаева (левую часть области можно про-

сто игнорировать) и, следовательно, невозмущенное движение $x_1 = x_2 = 0$ неустойчиво.

Заметим, что выбранная в этом примере функция V не удовлетворяет условиям теорем Ляпунова и Красовского (производная \dot{V} меняет знак при изменении знака x_1).

Прежде чем перейти к приложениям, отметим, что изложенные в § 2.2—2.4 теоремы составляют фундамент прямого метода Ляпунова. При их доказательстве предполагается, что рассматривается устойчивость относительно всех переменных, входящих в уравнения возмущенного движения. В. В. Румянцев в работе [45] распространил прямой метод Ляпунова на системы, в которых изучается устойчивость движения относительно части переменных.

§ 2.5. Методы построения функции Ляпунова

Применение основных теорем прямого метода требует знания функций Ляпунова, удовлетворяющих определенным требованиям. К сожалению, общих методов построения таких функций нет, но во многих случаях их можно сконструировать. Не останавливаясь на подробном разборе различных способов построения функций Ляпунова (см. обзор [2a]), укажем на несколько методов, чаще всего применяемых при решении практических задач.

1. Метод преобразования координат. Если для данных уравнений возмущенного движения трудно найти функцию Ляпунова, то часто переходом к новым координатам (конечно, прежде всего следует испробовать линейное преобразование с постоянными коэффициентами) уравнения удастся привести к такой форме, для которой соответствующая функция находится сравнительно просто. Этот метод неоднократно используется в настоящей книге (§ 4.2, 4.3, 5.4, 6.2 и др.).

2. Метод неопределенных коэффициентов. Будем искать функцию Ляпунова в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} x_k x_j. \quad (2.29)$$

Прежде всего подчиним неопределенные коэффициенты a_{kj} критерию Сильвестра (2.9). Тогда функция V будет определено-положительной. Так как число коэффициентов a_{kj} равно $n(n+1)/2$, то после этого останется еще $n(n-1)/2$ независимых коэффициентов, которыми можно распорядиться по своему усмотрению.

Предположим теперь, что требуется найти условия, налагаемые на параметры системы, при выполнении которых

невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво (в технических положениях этот случай встречается чаще всего). Тогда постараемся подобрать оставшиеся независимые коэффициенты a_{kj} функции V так, чтобы производная \dot{V} , вычисленная в силу уравнений возмущенного движения, была бы функцией определенно-отрицательной или удовлетворяла условиям теоремы Красовского. Если такие коэффициенты a_{kj} можно найти, то невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво. Этот метод применим не всегда, но в некоторых случаях он дает хорошие результаты. Прежде чем перейти к рассмотрению примера, заметим, что от умножения на постоянное положительное число свойства функции V не изменяются. Поэтому один коэффициент функции (2.20), например a_{nn} , можно положить равным единице.

Пример. Даны нелинейные уравнения возмущенного движения

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2^2, \quad \dot{x}_2 = cx_1x_2 + ex_2^3. \quad (2.21)$$

Требуется определить, каким условиям должны удовлетворять параметры системы a , b , c и e , чтобы невозмущенное движение $x_1 = x_2 = 0$ было асимптотически устойчиво.

Будем искать функцию V в форме (2.20)

$$V = \frac{1}{2} (\lambda x_1^2 + 2\mu x_1x_2 + x_2^2), \quad (2.22)$$

где λ и μ пока не определены. Критерий Сильвестра (2.9) для матрицы коэффициентов

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & 1 \end{vmatrix}$$

имеет вид

$$\Delta_1 = \lambda > 0, \quad \Delta_2 = \lambda - \mu^2 > 0. \quad (2.23)$$

Считая, что эти неравенства выполнены, вычислим производную \dot{V}

$$\dot{V} = (\lambda x_1 + \mu x_2) \dot{x}_1 + (\mu x_1 + x_2) \dot{x}_2.$$

Внесем сюда значения \dot{x}_1 и \dot{x}_2 из уравнений (2.21), тогда получим.

$$\dot{V} = (\lambda x_1 + \mu x_2) (ax_1 + bx_2^2) + (\mu x_1 + x_2) (cx_1x_2 + ex_2^3)$$

или, раскрывая скобки и группируя члены,

$$\dot{V} = \lambda ax_1^2 + (\lambda b + c) x_1x_2^2 + ex_2^4 + \mu (ax_1x_2 + bx_2^3 + cx_1^2x_2 + ex_1x_2^3).$$

При $\mu \neq 0$ эта функция будет знакопеременной. Поэтому, не нарушая условия (2.23), положим $\mu = 0$. При этом производная \dot{V} примет вид квадратичной формы относительно x_1 и x_2^2 :

$$\dot{V} = \lambda ax_1^2 + (\lambda b + c) x_1x_2^2 + ex_2^4. \quad (2.24)$$

Постараемся подобрать неопределенный множитель $\lambda > 0$ так, чтобы эта квадратичная форма была определенно-отрицательной. Для этого составим главные диагональные миноры матрицы коэффициентов. Имеем

$$\Delta_1^* = \lambda a, \quad \Delta_2^* = \lambda a e - (\lambda b + c)^2/4.$$

Для того чтобы квадратичная форма (2.24) относительно x_1 и x_2 была определенно-отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы был выполнен критерий Сильвестра (2.10). В нашем случае это даст два неравенства:

$$\lambda a < 0, \quad \lambda a e - (\lambda b + c)^2/4 > 0. \quad (2.25)$$

Для выполнения этих неравенств при $\lambda > 0$ необходимо потребовать прежде всего, чтобы коэффициенты a и e исходной системы (2.21) удовлетворяли условию

$$a < 0, \quad e < 0. \quad (2.26)$$

Преобразуем теперь второе соотношение (2.25) к виду

$$b^2\lambda^2 + 2(bc - 2ae)\lambda + c^2 < 0. \quad (2.27)$$

Это квадратичное неравенство можно удовлетворить при $\lambda > 0$, если оба корня λ_1 и λ_2 левой части будут вещественными и положительными. Действительно, в этом случае для всех λ , удовлетворяющих условию $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, будет справедливо неравенство (2.27). Для этого нужно, чтобы дискриминант трехчлена был положительен, а коэффициент при λ в первой степени отрицателен:

$$(bc - 2ae)^2 - b^2c^2 > 0, \quad bc - 2ae < 0$$

или

$$4ae(ae - bc) > 0, \quad bc < 2ae.$$

Так как, согласно (2.26), произведение ae положительно, то оба последние неравенства будут удовлетворены, если

$$bc < ae. \quad (2.28)$$

Теперь можно подвести итоги. Если параметры a , b , c и e системы (2.21) удовлетворяют условиям

$$a < 0, \quad e < 0, \quad bc < ae, \quad (2.29)$$

то при $\mu = 0$ и $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 — корни левой части неравенства (2.27), функция V , определенная равенством (2.22), будет определенно-положительной, а ее полная производная по времени, вычисленная в силу уравнений возмущенного движения (2.21), будет функцией определенно-отрицательной. На основании соответствующей теоремы Ляпунова заключаем, что при выполнении условий (2.29) невозмущенное движение $x_1 = x_2 = 0$ системы (2.21) асимптотически устойчиво.

Теорема Барбашина — Красовского позволяет сделать более сильное утверждение: если параметры системы (2.21) удовлетворяют неравенствам (2.29), то невозмущенное движение $x_1 = x_2 = 0$ будет устойчиво в целом. Читатель легко докажет это самостоятельно.

3. Построение функции Ляпунова с помощью связи интегралов. Предположим, что уравнения возмущенного движения (1.17) допускают интеграл

$$F(x_1, \dots, x_n) = h = \text{const}, \quad (2.30)$$

для которого разность $F(x) - F(0)$ является определенно-положительной функцией переменных x_1, \dots, x_n . Тогда в качестве функции Ляпунова можно взять функцию

$$V = F(x_1, \dots, x_n) - F(0). \quad (2.31)$$

Действительно, производная функции V по времени в силу уравнений возмущенного движения согласно интегралу (2.30) тождественно равна нулю и, следовательно, эта функция будет удовлетворять всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения (см. § 2.2).

В некоторых случаях дифференциальные уравнения возмущенного движения допускают несколько интегралов

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = h_1, \dots, F_m(x_1, \dots, x_n) = h_m, \quad (2.32)$$

где h_1, \dots, h_m — постоянные интегрирования, причем ни один из них не является определенно-положительной функцией. Для такого случая Н. Г. Четаев [49] предложил искать функцию V в форме *связки* интегралов (2.32). В общем виде эта связка имеет вид

$$V = \lambda_1 [F_1 - F_1(0)] + \dots + \lambda_m [F_m - F_m(0)] + \\ + \kappa_1 [F_1^2 - F_1^2(0)] + \dots + \kappa_m [F_m^2 - F_m^2(0)], \quad (2.33)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \kappa_1, \dots, \kappa_m$ — неопределенные постоянные.

Если постоянные λ_j и κ_j удастся подобрать таким образом, что функция V будет определенно-положительной, то она будет удовлетворять всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения (так как $V = \text{const}$ является также интегралом уравнений возмущенного движения).

Метод Четаева построения функции Ляпунова с помощью связи интегралов весьма эффективен. Прежде чем проиллюстрировать его на примерах (они будут рассмотрены в следующем параграфе), сделаем несколько замечаний:

а) один из $2m$ коэффициентов λ_j и κ_j можно выбрать произвольно, например, положив $\lambda_1 = 1$;

б) часто функцию V можно построить с помощью линейной связи интегралов, положив все $\kappa_j = 0$. Члены

с квадратами интегралов следует привлекать только в том случае, если линейная связка недостаточна;

в) во многих случаях интегралы уравнений возмущенного движения можно построить из общих соображений (например, с помощью общих теорем механики), не составляя самих уравнений. Этим приемом следует широко пользоваться, избегая лишних преобразований.

Примеры на применение метода связки интегралов будут рассмотрены в § 2.6. Заметим только, что этот метод был обобщен и послужил основой для построения вектор-функции Ляпунова [12а].

§ 2.6. Примеры на применение теоремы Ляпунова об устойчивости движения

При исследовании устойчивости движения (не асимптотической, а простой устойчивости) одним из наиболее эффективных методов является метод Четаева построения связки интегралов. В этом параграфе будут рассмотрены примеры применения этого метода.

Пример 1. Устойчивость движения конического маятника. Рассмотрим стационарное¹⁾ движение материальной точки M массой m , подвешенной на невесомой нити длиной l и движущейся с постоянной скоростью под действием силы тяжести по горизонтально расположенной окружности (конический маятник (рис. 2.14, а)). Нить маятника, закрепленная в точке O , описывает в стационарном движении круговой конус; обозначим угол между нитью и вертикалью OO_1 через α , а угловую скорость вращения нити вокруг вертикали OO_1 через ω . Между углом α , угловой скоростью ω и длиной маятника l в стационарном движении существует хорошо известное соотношение

$$\omega^2 \cos \alpha = g/l, \quad (2.34)$$

которое может быть получено, например, с помощью принципа Даламбера.

Примем стационарное движение маятника по окружности за невозмущенное движение. Предположим, что на это движение наложены небольшие возмущения. Обозначим угол между нитью и вер-

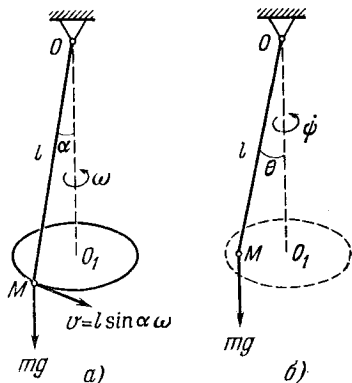


Рис. 2.14

¹⁾ Термин «стационарное движение» будет более подробно разъяснен в § 3.4.

тикалью OO_1 в возмущенном движении через θ (рис. 2.14, б), а угловую скорость вращения плоскости OO_1M вокруг вертикали OO_1 через ψ .

Введем обозначения

$$\theta = \alpha + x_1, \quad \dot{\theta} = x_2, \quad \dot{\psi} = \omega + x_3. \quad (2.35)$$

Будем изучать устойчивость невозмущенного движения относительно величин θ , $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$. Кинетическая T и потенциальная Π энергии маятника определяются равенствами

$$T = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2), \quad \Pi = -mgl \cos \theta.$$

Так как действующая на маятник сила тяжести потенциальна, а координата ψ циклическая (кинетическая энергия T зависит от обобщенной скорости $\dot{\psi}$, но не зависит от координаты ψ , и обобщенная сила, соответствующая этой координате, равна нулю: $Q_\psi = -\partial\Pi/\partial\psi = 0$), то существуют два интеграла движения (h и n — постоянные):

$$T + \Pi = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) - mgl \cos \theta = \frac{ml^2}{2} h, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\psi} = ml^2 n$$

(множители $ml^2/2$ и ml^2 введены для удобства).

Второе равенство представляет интеграл момента количества движения маятника относительно вертикали OO_1 , и его можно получить из элементарных соображений.

Пользуясь равенствами (2.35), запишем эти интегралы в следующей форме:

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = [x_2^2 + \sin^2(\alpha + x_1)(\omega + x_3)^2] - \frac{2g}{l} \cos(\alpha + x_1) = h, \\ F_2(x_1, x_2, x_3) = \sin^2(\alpha + x_1)(\omega + x_3) = n. \quad (2.36)$$

Интегралы (2.36) получены из общих теорем динамики. Конечно, можно было сначала составить дифференциальные уравнения возмущенного движения (1.27), а затем, комбинируя их, найти интегралы (2.36). Как уже было отмечено ранее в § 2.5, выбранный здесь путь является, как правило, более простым¹⁾.

Перейдем к исследованию устойчивости стационарного движения маятника относительно величин θ , $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$. Ни один из найденных интегралов не является знакоопределенной функцией относительно величин x_1 , x_2 и x_3 . Поэтому составим линейную связку интегралов (2.36), положив $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = \lambda$:

$$V = F_1 - F_1(0) + \lambda [F_2 - F_2(0)] = [x_2^2 + \sin^2(\alpha + x_1)(\omega + x_3)^2] - \\ - \frac{2g}{l} \cos(\alpha + x_1) - \left(\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{2g}{l} \cos \alpha \right) + \\ + \lambda \sin^2(\alpha + x_1)(\omega + x_3) - \lambda \sin^2 \alpha \omega.$$

¹⁾ Для того чтобы оценить рассмотренный здесь метод, рекомендуем читателю получить интегралы (2.36) из уравнений возмущенного движения (1.27).

Члены $-\left(\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{2g}{l} \cos \alpha\right)$ и $-\lambda \sin^2 \alpha \cdot \omega$ внесены для того, чтобы функция V обращалась в нуль при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Заменим отношение g/l его значением из равенства (2.34) и разложим функцию V в ряд по степеням x_1, x_2, x_3 . Имеем

$$\sin^2(\alpha + x_1) = \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha \cdot x_1 + \cos 2\alpha \cdot x_1^2 + \dots,$$

$$\cos(\alpha + x_1) = \cos \alpha - \sin \alpha \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot x_1^2 + \dots,$$

где точками обозначены члены высшего порядка.

Внесем эти значения для $\sin^2(\alpha + x_1)$ и $\cos(\alpha + x_1)$ в последнее выражение для функции V и сгруппируем члены:

$$V = \omega [(\lambda + \omega) \cos 2\alpha + \omega \cos^2 \alpha] x_1^2 + x_2^2 + \sin^2 \alpha \cdot x_3^2 + \\ + \omega \sin 2\alpha \cdot (\lambda + 2\omega) x_1 + \sin^2 \alpha \cdot (\lambda + 2\omega) x_3 + \\ + \sin 2\alpha \cdot (\lambda + 2\omega) x_1 x_3 + \dots$$

Для того чтобы функция V была определенно-положительной, необходимо прежде всего избавиться от членов, содержащих вариации x_1, x_2 и x_3 в первой степени (см. примечание к формуле (2.5)). В данном случае для этого достаточно положить

$$\lambda = -2\omega.$$

При таком значении λ функция V примет вид

$$V = \omega^2 \sin^2 \alpha \cdot x_1^2 + x_2^2 + \sin^2 \alpha \cdot x_3^2 + \dots$$

Так как квадратичная часть функции V определенно-положительна относительно x_1, x_2 и x_3 , то при достаточно малых значениях x_1, x_2 и x_3 вся функция V будет также определенно-положительна. Производная по времени функции V на основании интегралов (2.36) тождественно равна нулю, и, следовательно, стационарное движение конического маятника устойчиво относительно $\theta, \dot{\theta}$ и ψ . Этот результат будет получен в примере 1 § 3.5 другим методом.

Пример 2. Устойчивость стационарного движения центра масс искусственного спутника Земли. В § 1.3 было показано, что искусственный спутник Земли может совершать движение с постоянной скоростью по окружности радиуса r_0 . Параметры этого движения удовлетворяют условию (1.30)

$$\omega^2 r_0^3 = \mu. \quad (2.37)$$

Положение спутника в возмущенном движении будем определять сферическими координатами r, φ, θ (рис. 1.5, б). Кинетическая T и потенциальная Π энергии спутника определяются выражениями (1.31):

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad \Pi = -\mu \frac{m}{r}.$$

Так как действующая на искусственный спутник Земли сила тяготения потенциальна, а координата φ циклическая, то существуют два

интеграла движения (h и n — постоянные) ¹⁾

$$T + \Pi = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi}^2) - \mu \frac{m}{r} = \frac{m}{2} h, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi} = m n.$$

Будем рассматривать устойчивость стационарного движения спутника по круговой орбите относительно величин r , \dot{r} , θ , $\dot{\theta}$ и $\dot{\phi}$. Введем обозначения: $r = r_0 + x_1$, $\dot{r} = x_2$, $\theta = x_3$, $\dot{\theta} = x_4$, $\dot{\phi} = \omega + x_5$. В сделанных обозначениях найденные интегралы можно записать в следующей форме:

$$F_1 = x_2^2 + (r_0 + x_1)^2 x_4^2 + (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 \cdot (\omega + x_5)^2 - 2 \frac{\mu}{r_0 + x_1} = h,$$

$$F_2 = (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 \cdot (\omega + x_5) = n. \quad (2.39)$$

Отметим, что, так же как и в первом примере, оба интеграла дифференциальных уравнений возмущенного движения получены из общих соображений, без помощи самих уравнений. Конечно, второй интеграл (2.39) вытекает непосредственно из третьего уравнения (1.32), а первый интеграл может быть получен путем комбинации этих уравнений, но этот путь требует не только составления самих уравнений (1.32) или (1.33), но и умения получить из них необходимые интегралы.

Перейдем к исследованию невозмущенного движения спутника. Ни один из найденных интегралов не является знакоопределенной функцией величин x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Поэтому функцию Ляпунова V будем искать в форме связки этих интегралов

$$V = F_1 - F_1(0) + \lambda [F_2 - F_2(0)] + \kappa [F_2^2 - F_2^2(0)],$$

где λ и κ — постоянные числа.

Внесем в это выражение для V значения интегралов F_1 и F_2 :

$$V = x_2^2 + (r_0 + x_1)^2 x_4^2 + (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 \cdot (\omega + x_5)^2 -$$

$$- 2 \frac{\mu}{r_0 + x_1} - r_0^2 \omega^2 + 2 \frac{\mu}{r_0} + \lambda [(r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 \cdot (\omega + x_5) - r_0^2 \omega] +$$

$$+ \kappa [(r_0 + x_1)^4 \cos^4 x_3 \cdot (\omega + x_5)^2 - r_0^4 \omega^2].$$

Разложим правую часть этого равенства в ряд по степеням x_1, \dots, x_5 . Имеем

$$\cos^2 x_3 = \left(1 - \frac{x_3^2}{2} + \dots\right)^2 = 1 - x_3^2 + \dots,$$

$$\cos^4 x_3 = \left(1 - \frac{x_3^2}{2} + \dots\right)^4 = 1 - 2x_3^2 + \dots,$$

$$\frac{\mu}{r_0 + x_1} = \frac{\mu}{r_0} - \mu \frac{x_1}{r_0^2} + \mu \frac{x_1^2}{r_0^3} + \dots,$$

где точками обозначены члены высшего порядка.

¹⁾ Эти интегралы можно получить путем комбинации уравнений возмущенного движения центра масс искусственного спутника Земли (1.33).

Подставим эти выражения в последнее равенство и учтем, что в стационарном движении параметры ω и r_0 удовлетворяют условию (2.37). Тогда после очевидных преобразований получим

$$V = \omega (-\omega + \lambda + 6\kappa r_0^2 \omega) x_1^2 + x_2^2 - r_0^2 \omega (\omega + \lambda + 2\kappa r_0^2 \omega) x_3^2 + \\ + r_0^2 x_4^2 + r_0^2 (1 + \kappa r_0^2) x_5^2 + 2r_0 \omega (2\omega + \lambda + 2\kappa r_0^2 \omega) x_1 + \\ + r_0^2 (2\omega + \lambda + 2\kappa r_0^2 \omega) x_5 + 2r_0 (2\omega + \lambda + 4\kappa r_0^2 \omega) x_1 x_5 + \dots$$

Для того чтобы функция V была знакоопределенной, нужно прежде всего приравнять нулю коэффициенты при членах, содержащих переменные x_1 и x_5 в первой степени (см. примечание к формуле (2.5)). Таким образом, числа λ и κ должны удовлетворять соотношению

$$2\omega + \lambda + 2\kappa r_0^2 \omega = 0.$$

Отсюда

$$\lambda = -2\omega - 2\kappa r_0^2 \omega.$$

Подставляя это значение λ в последнее выражение для V , найдем

$$V = \omega^2 (4\kappa r_0^2 - 3) x_1^2 + x_2^2 + r_0^2 \omega^2 x_3^2 + r_0^2 x_4^2 + \\ + r_0^2 (1 + \kappa r_0^2) x_5^2 + 4\kappa r_0^3 \omega x_1 x_5 + \dots$$

Разобьем квадратичные члены на две функции:

$$V_1 = x_2^2 + r_0^2 \omega^2 x_3^2 + r_0^2 x_4^2,$$

$$V_2 = \omega^2 (4\kappa r_0^2 - 3) x_1^2 + 4\kappa r_0^3 \omega x_1 x_5 + r_0^2 (1 + \kappa r_0^2) x_5^2.$$

Функция V_1 определено-положительна относительно величин x_2 , x_3 и x_4 . Поэтому для того, чтобы функция V была знакоопределенной относительно x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , достаточно показать, что можно найти такое число κ , при котором функция V_2 будет определено-положительной относительно x_1 и x_5 . Критерий Сильвестра для функции V_2 имеет вид (см. формулы (2.9))

$$\Delta_1 = \omega^2 (4\kappa r_0^2 - 3) > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \omega^2 (4\kappa r_0^2 - 3) & 2\kappa r_0^3 \omega \\ 2\kappa r_0^3 \omega & r_0^2 (1 + \kappa r_0^2) \end{vmatrix} = \omega^2 r_0^2 (\kappa r_0^2 - 3) > 0.$$

Из этих выражений видно, что при $\kappa > 3/r_0^2$ оба условия будут выполнены и, следовательно, функция V_2 будет определено-положительной относительно x_1 , x_5 , а функция V — определено-положительной относительно x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , что и доказывает устойчивость стационарного движения искусственного спутника Земли относительно величин r , \dot{r} , θ , $\dot{\theta}$, φ ¹⁾.

¹⁾ Этот результат получен В. В. Румянцевым [46] другим методом (см. пример 2 § 3.5). Там же исследованы на устойчивость другие стационарные движения искусственного спутника Земли.

Прежде чем перейти к следующему примеру, сделаем одно замечание. Во многих задачах требуется ответить на вопрос: будет ли рассматриваемое движение устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво? Первые два примера относились как раз к этой группе задач. Однако, как уже отмечалось ранее, в технике, как правило, встречаются задачи другого плана, а именно: известно, что при некоторых значениях параметров системы невозмущенное движение неустойчиво. Ставится задача: как следует выбрать параметры системы, чтобы ее движение сделалось устойчивым (или асимптотически устойчивым)? Третий пример относится ко второй группе задач.

Пример 3. Достаточное условие устойчивости волчка (условие устойчивости вращательного движения снаряда). Каждому ребенку известно, что невращающийся волчок падает и, для того чтобы его ось сохраняла вертикальное положение, волчок нужно сильно закрутить, т. е. ему нужно сообщить достаточно большую скорость собственного вращения. Точно так же все артиллеристы знают, что невращающийся продолговатый снаряд (снаряд, выстреленный из гладкоствольного орудия) кувиркается. Естественно возникает вопрос: какую угловую скорость собственного вращения нужно сообщить волчку (снаряду), чтобы он не падал (снаряд не кувиркался)?

Так как вращательное движение продолговатого снаряда, центр масс которого перемещается по весьма настильной траектории, и движение волчка около вертикали описываются совершенно одинаковыми дифференциальными уравнениями, то достаточно рассмотреть устойчивость движения одного из них, например устойчивость волчка.

На волчок, угловая скорость собственного вращения которого равна ϕ , действуют две внешние силы (силами сопротивления пренебрегаем): сила тяжести P , приложенная к центру масс C волчка, и реакция R_0 опоры O (рис. 2.15, а). Положение оси z симметрии волчка относительно неподвижных осей $\xi\eta\zeta$ (ось ζ вертикальна) будет определяться углами α и β (рис. 2.15, б). За невозмущенное движение волчка примем его равномерное вращение с угловой скоростью $\phi_0 = n$ вокруг оси симметрии z , совпадающей с неподвижной вертикальной осью ζ . В невозмущенном движении

$$\alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \beta = 0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \phi = \dot{\phi}_0 = n = \text{const.}$$

В возмущенном движении все эти величины будут меняться.

Введем оси x, y, z (рис. 2.15, б) и обозначим через p_1, q_1 и r_1 проекции угловой скорости ω_1 вращения трехгранника xyz относительно неподвижных осей $\xi\eta\zeta$.

Пользуясь рис. 2.15, б, найдем

$$p_1 = \dot{\alpha}, \quad q_1 = \dot{\beta} \cos \alpha, \quad r_1 = -\dot{\beta} \sin \alpha.$$

Проекции p, q, r угловой скорости ω вращения волчка определяются равенствами

$$p = \dot{\alpha}, \quad q = \dot{\beta} \cos \alpha, \quad r = \dot{\phi} - \dot{\beta} \sin \alpha.$$

Теперь найдем кинетическую энергию волчка

$$T = \frac{1}{2} J_x (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} J_z (\dot{\varphi} - \dot{\beta} \sin \alpha)^2.$$

Здесь $J_x = J_y$ — экваториальные, а J_z — аксиальный моменты инерции волчка.

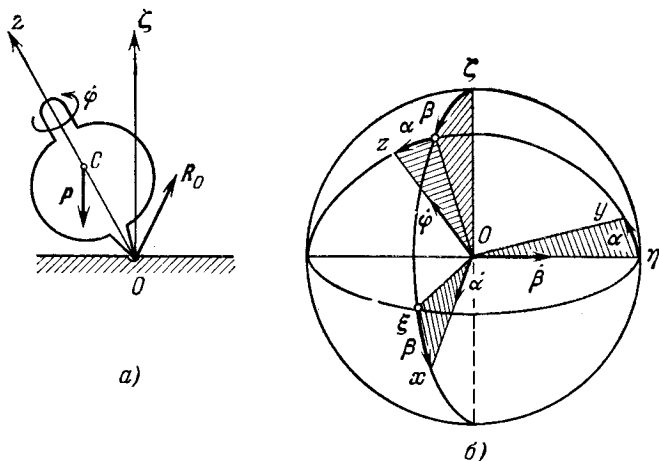


Рис. 2.15

Потенциальная энергия Π волчка будет

$$\Pi = Pl \cos \alpha \cos \beta,$$

где P — вес волчка, l — расстояние от его центра масс C до опоры O .

В рассматриваемом случае можно, так же как и в первых двух примерах, не составляя дифференциальных уравнений возмущенного движения, найти три интеграла. Два интеграла определяются сразу — это интеграл энергии и интеграл, соответствующий циклической координате φ (второй интеграл — интеграл моментов количества движения волчка относительно оси z):

$$T + \Pi = \frac{1}{2} J_x (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} J_z (\dot{\varphi} - \dot{\beta} \sin \alpha)^2 + Pl \cos \alpha \cos \beta = h,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_z (\dot{\varphi} - \dot{\beta} \sin \alpha) = J_z n_1.$$

Третий интеграл — это интеграл моментов количества движения волчка относительно неподвижной оси ζ

$$K_\zeta = k = \text{const.}$$

Для того чтобы написать этот интеграл в явном виде, воспользуемся очевидными равенствами:

$$K_x = J_x p = J_x \dot{\alpha}, \quad K_y = J_y q = J_x \dot{\beta} \cos \alpha, \quad K_z = J_z r = \\ = J_z (\dot{\phi} - \dot{\beta} \sin \alpha), \\ K_{\zeta} = K_x \cos (\zeta x) + K_y \cos (\zeta y) + K_z \cos (\zeta z).$$

Пользуясь рис. 2.15, б, найдем

$$\cos (\zeta x) = -\sin \beta, \quad \cos (\zeta y) = \sin \alpha \cos \beta, \quad \cos (\zeta z) = \cos \alpha \cos \beta.$$

Следовательно, третий интеграл имеет вид

$$J_x (-\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\beta} \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta) + J_z (\dot{\phi} - \dot{\beta} \sin \alpha) \cos \alpha \cos \beta = k.$$

Будем изучать устойчивость движения волчка относительно величин α , $\dot{\alpha}$, β , $\dot{\beta}$ и $\dot{\phi}$. Введем следующие обозначения:

$$\dot{\alpha} = x_1, \quad \dot{\alpha} = x_2, \quad \beta = x_3, \quad \dot{\beta} = x_4, \quad \dot{\phi} = \dot{\phi}_0 + x_5.$$

В этих обозначениях найденные интегралы дифференциальных уравнений возмущенного движения примут вид

$$F_1 = \frac{1}{2} J_x (x_2^2 + x_4^2 \cos^2 x_1) + \\ + \frac{1}{2} J_z (\dot{\phi}_0 + x_5 - x_4 \sin x_1)^2 + Pl \cos x_1 \cos x_3 = h,$$

$$F_2 = \dot{\phi}_0 + x_5 - x_4 \sin x_1 = n_1, \quad (2.40)$$

$$F_3 = J_x (-x_2 \sin x_3 + x_4 \sin x_1 \cos x_1 \cos x_3) + \\ + J_z (\dot{\phi}_0 + x_5 - x_4 \sin x_1) \cos x_1 \cos x_3 = k.$$

Так как ни один из этих интегралов не является знакоопределенной функцией, то составим линейную связку интегралов

$$V = F_1 - F_1(0) + \mu [F_2 - F_2(0)] + \lambda [F_3 - F_3(0)],$$

где μ и λ — неопределенные постоянные коэффициенты.

Внесем сюда значения F_1 , F_2 и F_3 , разложим в ряд по степеням x_1, \dots, x_5 и учтем, что $\dot{\phi}_0 = n$. Тогда после группировки членов получим

$$V = (J_z n + \mu + \lambda J_z) x_5 - \frac{1}{2} (Pl + \lambda J_z n) x_1^2 + \frac{1}{2} J_x x_2^2 - \\ - \frac{1}{2} (Pl + \lambda J_z n) x_3^2 + \frac{1}{2} J_x x_4^2 + \frac{1}{2} J_z x_5^2 - \\ - (J_z n + \mu + \lambda J_z - \lambda J_x) x_1 x_4 - \lambda J_x x_2 x_3 + \dots,$$

где точками обозначены члены высшего порядка.

Для того чтобы функция V была знакоопределенной, необходимо прежде всего приравнять нулю коэффициент при первой степени x_5 . Имеем

$$J_z n + \mu + \lambda J_z = 0.$$

Теперь функция V примет вид

$$V = \frac{1}{2} ax_1^2 + \frac{1}{2} J_x x_2^2 + \frac{1}{2} ax_3^2 + \frac{1}{2} J_x x_4^2 + \frac{1}{2} J_z x_5^2 + \lambda J_x x_1 x_4 - \lambda J_x x_2 x_3 + \dots,$$

где

$$a = -(Pl + \lambda J_z n). \tag{2.41}$$

Разобьем квадратичную часть функции V на три функции:

$$V_1 = \frac{1}{2} ax_1^2 + \lambda J_x x_1 x_4 + \frac{1}{2} J_x x_4^2,$$

$$V_2 = \frac{1}{2} ax_3^2 - \lambda J_x x_2 x_3 + \frac{1}{2} J_x x_2^2,$$

$$V_3 = \frac{1}{2} J_z x_5^2.$$

Функция V_3 определенно-положительна относительно x_5 , а функции V_1 и V_2 имеют одинаковую структуру. Поэтому, согласно общей теории для определения условия устойчивости невозмущенного движения волчка относительно величин α , $\dot{\alpha}$, β , $\dot{\beta}$ и ϕ , достаточно определить условие, при котором функция V_1 будет определенно-положительной относительно величин x_1 и x_4 (при этом же условии функция V_2 будет определенно-положительной относительно величин x_2 и x_3).

Напишем условие Сильвестра для функции V_1 :

$$\Delta_1 = a > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & \lambda J_x \\ \lambda J_x & J_x \end{vmatrix} = J_x (a - J_x \lambda^2) > 0.$$

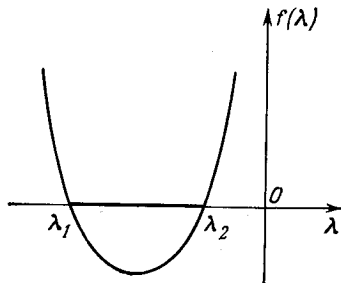


Рис. 2.16

Пользуясь выражением (2.41), приведем эгь неравенства к следующему виду:

$$\lambda < -\frac{Pl}{J_z n}, \quad f(\lambda) = J_x \lambda^2 + J_z n \lambda + Pl < 0. \tag{2.42}$$

Осталось выяснить условия, при выполнении которых можно подобрать число λ , удовлетворяющее соотношениям (2.42).

Если дискриминант трехчлена $f(\lambda)$

$$D = J_z^2 n^2 - 4 J_x Pl$$

положителен, то оба корня λ_1 и λ_2 уравнения $f(\lambda) = 0$ будут вещественны и различны. Из графика функции $f = f(\lambda)$ (рис. 2.16) видно, что в этом случае для всех λ , удовлетворяющих неравенству $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, функция $f(\lambda) < 0$, т. е. будет выполнено второе ус-

ловие (2.42). Заметим, что при $n > 0$ оба корня отрицательны (случай, показанный на рис. 2.16), а при $n < 0$ оба корня λ_1 и λ_2 положительны.

Покажем, что для этих λ будет выполнено и первое неравенство (2.42). Для этого достаточно показать, что при $n > 0$ этому условию удовлетворяет больший корень λ_2 . Имеем

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{1}{2J_x} \left(-J_z n + \sqrt{J_z^2 n^2 - 4J_x Pl} \right) = \\ &= \frac{J_z n}{2J_x} \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{4J_x Pl}{J_z^2 n^2}} \right). \end{aligned}$$

Используя теперь очевидное неравенство

$$\sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x,$$

получим

$$\lambda_2 < -\frac{Pl}{J_z n},$$

что доказывает сделанное замечание для $n > 0$ (при $n < 0$ нужно рассмотреть меньший корень λ_1).

Итак, если угловая скорость n в невозмущенном движении волчка удовлетворяет условию $D > 0$, т. е.

$$J_z^2 n^2 > 4J_x Pl, \quad (2.43)$$

то для всех λ , заключенных между λ_1 и λ_2 , функция V будет определено-положительной. Ее полная производная по времени в силу уравнений возмущенного движения на основании интегралов (2.40) равна нулю. Следовательно, неравенство (2.43) является достаточным условием устойчивости вертикального положения волчка относительно величин α , $\dot{\alpha}$, β , $\dot{\beta}$, ϕ (для снаряда в условии (2.43) нужно заменить произведение Pl на модуль момента опрокидывающей пары ¹⁾).

Остается невыясненным вопрос об устойчивости вертикального положения волчка, когда угловая скорость собственного вращения его в невозмущенном движении будет меньше граничной величины, определяемой неравенством (2.43). Этот вопрос будет решен в примере 4 § 4.5.

Прежде чем перейти к примерам на применение теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, заметим, что иногда с помощью выбранной связки интегралов построить знакоопределенную функцию нельзя. В этом случае нужно испытать другие комбинации интегралов. Если же все связки интегралов не дают возможности определить условия устойчивости движения, то это еще не

¹⁾ Впервые условие устойчивости (2.43) для вращательного движения снаряда (оно известно как условие Маниевского — Крылова) строго доказал Н. Г. Четаев (см. [49]).

означает, что движение неустойчиво — нужно просто перейти к другим методам, с помощью которых можно будет решить вопрос об устойчивости.

§ 2.7. Примеры на применение теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения

Пример 1. Асимптотическая устойчивость равновесия твердого тела, находящегося в сопротивляющейся среде. Рассмотрим свободное твердое тело, движущееся в сопротивляющейся среде поступательно относительно инерциальной системы отсчета (в частности, оно может находиться в покое). Это движение тела примем за невозмущенное. Дадим телу небольшие возмущения, в результате чего возникает вращательное движение относительно поступательно перемещающихся координатных осей $C\xi\eta\zeta$, начало которых совпадает с центром масс C тела.

Будем считать, что среда, в которой движется тело, создает момент сил сопротивления M , пропорциональный некоторой степени угловой скорости ω тела:

$$M = -\kappa\omega^\alpha \frac{\omega}{\omega} = -\kappa\omega^{\alpha-1}\omega, \quad (2.44)$$

где ω — угловая скорость тела в возмущенном движении, а κ и α — положительные коэффициенты (они могут быть постоянными, но могут зависеть и от ω , изменяясь в некоторых пределах: $0 < \kappa_1 \leq \kappa(\omega) \leq \kappa_2$, $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha(\omega) \leq \alpha_2$).

Кроме того, будем предполагать, что другие силы, действующие на тело (если они существуют), не создают момента относительно центра масс. В этих предположениях динамические уравнения Эйлера (см., например, [12]) примут вид

$$\begin{aligned} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_z\omega_y &= -\kappa\omega^{\alpha-1}\omega_x, \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z &= -\kappa\omega^{\alpha-1}\omega_y, \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_y\omega_x &= -\kappa\omega^{\alpha-1}\omega_z, \end{aligned} \quad (2.45)$$

где J_x, J_y, J_z — моменты инерции тела относительно главных центральных осей инерции тела x, y, z , а $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции угловой скорости тела на те же оси.

Будем рассматривать устойчивость вращательного движения тела относительно проекций угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Так как по условию задачи в невозмущенном движении $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ (тело двигалось поступательно или находилось в покое), то уравнения (2.45) будут дифференциальными уравнениями возмущенного движения.

Докажем, что невозмущенное движение тела асимптотически устойчиво относительно величин $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Для этого умножим

первое уравнение (2.45) на ω_x , второе на ω_y , третье на ω_z и сложим все уравнения. После очевидных преобразований получим

$$J_x \omega_x \frac{d\omega_x}{dt} + J_y \omega_y \frac{d\omega_y}{dt} + J_z \omega_z \frac{d\omega_z}{dt} = -\kappa \omega^{\alpha-1} (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2), \quad (2.46)$$

или, учитывая, что $\omega = (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)^{1/2}$,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) = -\kappa (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}. \quad (2.47)$$

Функция

$$V = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2)$$

определенно-положительна, а ее производная в силу уравнений возмущенного движения, согласно равенству (2.47), определенно-отрицательна. Следовательно, выполнены все условия соответствующей теоремы Ляпунова и вращательное движение тела в сделанных

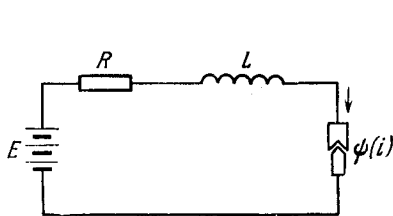


Рис. 2.17

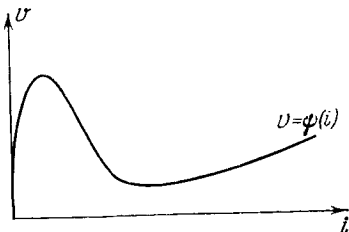


Рис. 2.18

предположениях асимптотически устойчиво относительно величин ω_x , ω_y и ω_z . Заметим, что из этого не следует устойчивость относительно угловых перемещений.

Пример 2. Устойчивость установившихся режимов вольтовой дуги в цепи с сопротивлением и самоиндукцией [4]. Рассмотрим вольтовую дугу, включенную в цепь с омическим сопротивлением R , самоиндукцией L и источником энергии, электродвижущая сила которого равна E (рис. 2.17). Вольтова дуга представляет собой проводник, не подчиняющийся закону Ома. На рис. 2.18 приведен график статической характеристики вольтовой дуги для установившихся режимов. В дальнейшем будем считать, что установленная этим графиком зависимость $v = \phi(i)$ между током i и напряжением v в дуге в промежутке справедлива и для режимов, близких к установившимся. Это равносильно предположению, что скорость колебательных процессов в схеме мала по сравнению со скоростями установления ионных процессов, обуславливающих ток в вольтовой дуге.

Пользуясь вторым законом Кирхгофа, получим в сделанных предположениях следующее дифференциальное уравнение:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \psi(i) = E. \quad (2.48)$$

Внося сюда $i = I = \text{const}$, получим уравнение для определения значений тока, отвечающих установившимся режимам:

$$RI + \psi(I) = E. \quad (2.49)$$

Корни этого уравнения легко определяются как абсциссы точек пересечения графиков функций.

$$u = \psi(i), \quad u = E - Ri.$$

В зависимости от значений параметров E и R уравнение (2.49) может иметь три, два, один и ни одного вещественного корня. На рис. 2.19 изображен случай трех корней этого уравнения (при

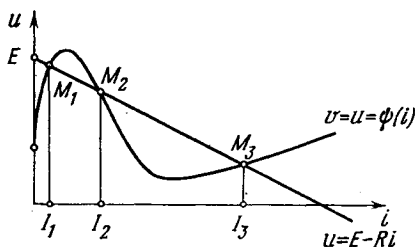


Рис. 2.19

двух корнях точки M_1 и M_2 (или M_2 и M_3) сливаются, при одном корне прямая $u = E - Ri$ пересекает график функции $u = \psi(i)$ в одной точке, при отсутствии корней графики не пересекаются.

Рассмотрим случай трех различных корней. Это означает, что теоретически могут существовать три установившихся режима вольтовой дуги, соответствующих трем значениям тока I_1, I_2, I_3 . Очевидно, что практически реализуемы только устойчивые режимы, поэтому необходимо исследовать каждый из этих режимов на устойчивость.

За невозмущенное примем установившееся движение $i = I$. Обозначим значение тока в возмущенном движении через

$$i = I + x.$$

Внося это значение тока в дифференциальное уравнение движения системы (2.48) и учитывая, что $dI/dt = 0$, получим

$$L \frac{dx}{dt} + R(I + x) + \psi(I + x) = E.$$

Разложим функцию $\psi(I + x)$ в ряд по степеням x

$$\psi(I + x) = \psi(I) + \psi'(I)x + \dots,$$

где точками обозначены члены высшего порядка.

Дифференциальное уравнение движения примет вид

$$L \frac{dx}{dt} + RI + Rx + \psi(I) + \psi'(I)x + \dots = E,$$

или, учитывая, что значения тока I удовлетворяют уравнению (2.49):

$$L \frac{dx}{dt} = -(R + \kappa)x + \dots, \quad (2.50)$$

где для простоты положено $\kappa = \psi'(I)$.

Умножим обе части этого дифференциального уравнения возмущенного движения на x . Тогда после очевидных преобразований получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Lx^2 \right) = -(R + \kappa)x^2 + \dots \quad (2.51)$$

Функция

$$V = \frac{1}{2} Lx^2$$

определенно-положительна относительно x . Ее производная по времени, вычисленная в силу дифференциального уравнения возмущенного движения (2.50), определяется правой частью равенства (2.51). Если $R + \kappa > 0$, то производная \dot{V} будет определено-отрицательной функцией x и, следовательно, на основании теоремы Ляпунова движение будет асимптотически устойчиво. Если же $R + \kappa < 0$, то производная \dot{V} будет определено-положительной функцией, и на основании теоремы Ляпунова о неустойчивости установившееся движение будет неустойчиво.

Таким образом, имеем

$R + \kappa > 0$ — установившееся движение асимптотически устойчиво,

$R + \kappa < 0$ — установившееся движение неустойчиво.

Из рис. 2.19 видно, что в точках M_1 и M_3 функция $u = \psi(i)$ возрастает и, следовательно, ее производная $\psi' = \kappa$ в этих точках положительна. На этом основании при $i = I_1$ и $i = I_3$ число $R + \kappa$ больше нуля. Это означает, что установившиеся режимы, соответствующие значениям i , равным I_1 и I_3 , асимптотически устойчивы относительно тока.

В средней точке M_2 функция $u = \psi(i)$ убывает, поэтому $\kappa_2 = \psi'(I_2) < 0$. Кроме того, график этой функции в точке M_2 более крутой, чем прямая $u = E - Ri$. Это означает, что модуль углового коэффициента касательной, проведенной к графику функции $u = \psi(i)$ в точке M_2 , больше модуля углового коэффициента прямой $u = E - Ri$, т. е. $|\kappa_2| = |\psi'(I_2)| > | -R | = R$. Учитывая, что $\kappa_2 = \psi'(I_2) < 0$, будем иметь $R + \kappa_2 < 0$. Следовательно, установившийся режим, соответствующий току I_2 , неустойчив.

При установившемся режиме угловой коэффициент $\kappa = \psi'(I)$ может быть положительным, но может быть и отрицательным. Если на плоскости (R, κ) построить прямую $\kappa = -R$, то, очевидно, всем точкам, лежащим выше этой прямой (для них $\kappa > -R$, или $R + \kappa > 0$), отвечают асимптотически устойчивые установившиеся режимы, а для точек, лежащих ниже этой прямой, — неустойчивые режимы. На рис. 2.20 показана область асимптотической устойчивости на плоскости R, κ .

При одной и той же функции $v = u = \psi(i)$ число корней уравнения (2.49) и их значения зависят от параметров системы — электродвижущей силы E и сопротивления R . Меняя один из этих параметров или одновременно оба, можно получить один, два или три установившихся режима. Рассмотрим для примера зависимость то-

ка I в установившемся режиме от параметра E . Для этого построим на плоскости EI график уравнения (2.49)

$$E - RI - \psi(I) = 0,$$

считая сопротивление R неизменным (рис. 2.21). Этот график можно построить, например, следующим образом. Задаем определенное значение E и определяем с помощью рис. 2.19 соответствующие значения тока I , после чего наносим полученные точки (EI) на плоскость EI . Так, значению E электродвижущей силы (рис. 2.19) отвечают три значения тока I_1, I_2 и I_3 ; точки N_1, N_2, N_3 рис. 2.21 соответствуют точкам M_1, M_2, M_3 рис. 2.19.

Было показано, что крайним значениям тока I_1 и I_3 соответствуют асимптотически устойчивые режимы вольтовой дуги, а среднему значению I_2 — неустойчивый режим. Из этого следует, что точкам кривой $ABCD$ рис. 2.21, лежащим на участке CD , соответствуют неустойчивые режимы, а токам той же кривой, лежащим на участках AC и DH — асимптотически устойчивые режимы. Точки C и D , разделяющие устойчивые участки от

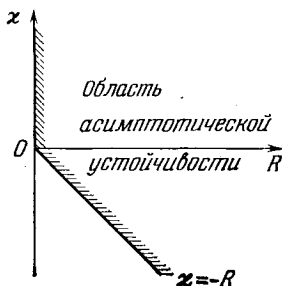


Рис. 2.20

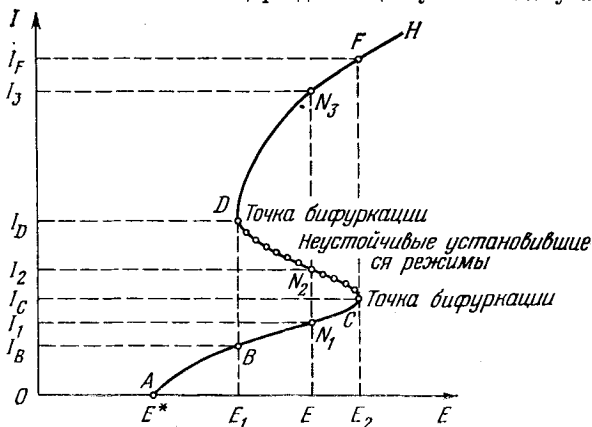


Рис. 2.21

неустойчивых, называются точками бифуркации, а сама кривая $ABCD$, устанавливающая зависимость координат в установившемся режиме от параметра (в данном примере зависимость тока I от электродвижущей силы источника E), называется кривой равновесия¹⁾.

¹⁾ Теория бифуркаций, созданная А. Пуанкаре, развивалась в дальнейшем многими учеными, в частности Н. Г. Четаевым, А. А. Андроновым и др.

Кривая равновесия дает возможность наглядно проследить за состоянием системы при изменении параметра. Так, если медленно и непрерывно изменять E , начиная от $E = 0$, то, как видно из рис. 2.21, при значениях E , меньших E^* , установившихся режимов

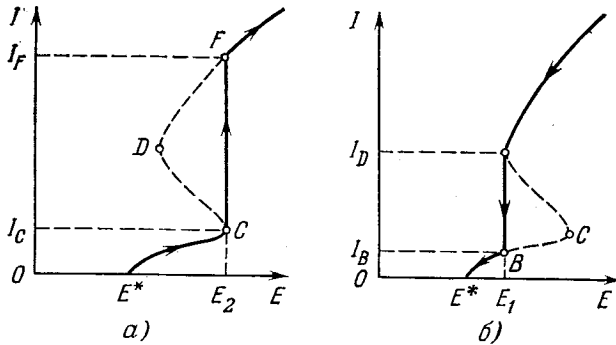


Рис. 2.22

не существует и, следовательно, вольтовой дуги не будет. При дальнейшем изменении E от E^* до E_2 мы будем перемещаться по участку AC кривой равновесия. Возникшей вольтовой дуге будет соответствовать ток, изменяющийся от 0 до I_C . При переходе электродвижущей силы E через значение E_2 ток скачкообразно изменится от I_C до I_F и затем будет непрерывно увеличиваться вместе с увеличением E (рис. 2.22, а). Если теперь уменьшать E от значений, больших E_2 , до E_1 , то ток будет непрерывно уменьшаться до I_D . При

прохождении электродвижущей силы E через E_1 ток скачкообразно уменьшится от I_D до I_B и в дальнейшем будет непрерывно уменьшаться вместе с уменьшением E (рис. 2.22, б).

Аналогично можно построить кривую равновесия, соответствующую изменению сопротивления R .

Пример 3. Условие устойчивости лампового генератора [4]. Рассмотрим простейшую схему лампового генератора с индуктивной обратной связью и колебательным контуром в цепи сетки (рис. 2.23). Пользуясь

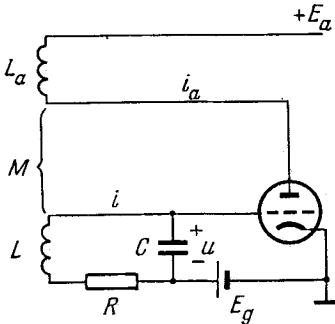


Рис. 2.23

законами Кирхгофа и учитывая направления токов в цепи, а также положение положительной полярности конденсатора, получим следующие уравнения (сеточными токами пренебрегаем):

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{C}i, \quad L \frac{di}{dt} = u - Ri - M \frac{di_a}{dt}. \quad (2.52)$$

Член $-M di_a/dt$ представляет э.д.с. обратной связи, наводимую благодаря воздействию на контур анодного тока, протекающего по катушке L_a . Считая, что анодный ток зависит только от сеточного напряжения $u_g = u$ (это достаточно хорошо выполняется для триодов с большим коэффициентом усиления), будем иметь

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{di_a}{du} \frac{du}{dt} = S(u) \frac{du}{dt},$$

где $S(u) = \frac{di_a}{du}$ — крутизна характеристики i_a лампы (примерная зависимость тока i_a и величины σ от напряжения $u_g = u$ по-

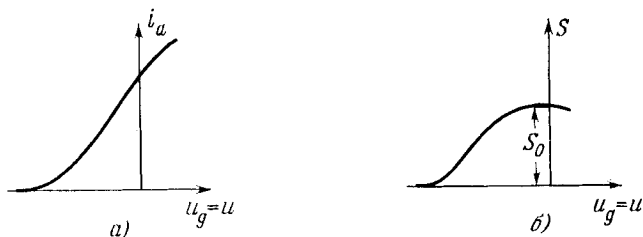


Рис. 2.24

казаны на рис. 2.24). Теперь дифференциальные уравнения движения (2.52) примут вид

$$\frac{du}{dt} = -\frac{i}{C}, \quad L \frac{di}{dt} = u - \frac{1}{C} [RC - MS(u)] i. \quad (2.53)$$

Исследуем устойчивость равновесного состояния $u = 0, i = 0$ относительно напряжения u и тока i . Для этого возьмем функцию Ляпунова в следующей форме:

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{C} i^2 + u^2 \right). \quad (2.54)$$

Очевидно, что эта функция определенно-положительна. Вычислим производную \dot{V} функции V :

$$\dot{V} = \frac{L}{C} i \frac{di}{dt} + u \frac{du}{dt}. \quad (2.55)$$

Подставим вместо di/dt и du/dt их значения из уравнений (2.53)

$$\dot{V} = \frac{L}{C} i \left\{ \frac{u}{L} - \frac{1}{LC} [RC - MS(u)] i \right\} + u \left(-\frac{i}{C} \right)$$

или, раскрывая скобки и группируя члены,

$$\dot{V} = -\frac{1}{C^2} [RC - MS(u)] i^2. \quad (2.56)$$

Разложим функцию $S(u)$ в ряд по степеням u :

$$S(u) = S(0) + S'(0)u + \dots, \quad (2.57)$$

и внесем это выражение для $S(u)$ в производную \dot{V} :

$$\dot{V} = -\frac{1}{C^2} (RC - MS_0) i^2 + \dots, \quad (2.58)$$

где точками обозначены члены, содержащие u и i в степени выше второй, а $S_0 = S(0)$.

При достаточно малых по модулю значениях u и i производная \dot{V} будет не знакоопределенной, а только знакопостоянной функцией переменных u и i . Поэтому, пользуясь выбранной функцией \dot{V} (2.54), мы не можем применить теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения. Неприменима к ней и теорема Четаева о неустойчивости движения. Воспользуемся теоремами Красовского. В качестве многообразия K возьмем совокупность точек, для которых $u \neq 0, i = 0$ (на плоскости (i, u) это ось u). Покажем, что многообразию K не принадлежат целые траектории системы. Для этого внесем в уравнение движения (2.53) значения переменных i и u , определяющих K . При $i = 0$ и $u \neq 0$ эти уравнения примут вид

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad u = 0,$$

что невозможно, так как на K $u \neq 0$.

Рассмотрим теперь два случая:

$$RC - MS_0 > 0, \quad (2.59)$$

$$RC - MS_0 < 0. \quad (2.60)$$

Если параметры системы удовлетворяют неравенству (2.59), то будут выполнены все условия теоремы Н. Н. Красовского об асимптотической устойчивости § 2.3. Действительно, функция V определено-положительна, а ее производная \dot{V} , согласно равенству (2.58) и соотношению (2.59), отрицательна вне K и равна нулю на K ($i = 0, u \neq 0$). Поэтому равновесное состояние системы $i = 0, u = 0$ будет асимптотически устойчиво относительно тока i и напряжения u .

Пусть теперь параметры системы удовлетворяют соотношению (2.60). Тогда будут выполнены все условия теоремы Н. Н. Красовского о неустойчивости движения § 2.4. Действительно, функция V может принимать положительные значения (она определено-положительна), а ее производная \dot{V} , согласно (2.58) и (2.60), положительна вне K и равна нулю на K . Следовательно, равновесное состояние системы $i = 0, u = 0$ неустойчиво.

Таким образом, при выполнении условия (2.59) равновесное состояние системы асимптотически устойчиво относительно тока i и напряжения u , а при выполнении условия (2.60) равновесное состояние системы неустойчиво. Случай $RC = MS_0$ требует дополнительного исследования, но практического интереса он не представляет, так как при небольшом нарушении этого условия (что всегда возможно, ибо все элементы системы изготавливаются с определенными допусками) получится неустойчивая или асимптотически устойчивая система. В § 4.5 разобранный здесь пример будет решен другим, более простым методом.

Пример 4. Устойчивость равновесия системы с одной степенью свободы, находя-

щейся под действием потенциальной нелинейной силы и силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости. Обозначим обобщенную координату, отсчитываемую от положения равновесия, через q . Будем считать, что кинетическая T и потенциальная Π энергии системы определяются равенствами

$$T = \frac{1}{2} M \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{\kappa}{m+1} q^{m+1}, \quad (2.61)$$

где M — приведенная масса системы, предполагаемая постоянной, κ — постоянный коэффициент, а m — положительное целое число, не меньшее двух ($m \geq 2$).

Считая, что, помимо потенциальной силы, на систему действует сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости, составим уравнение возмущенного движения (за невозмущенное движение принимается состояние покоя, при котором $q = 0$, $\dot{q} = 0$):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} - \mu \dot{q},$$

где μ — положительная постоянная, характеризующая силу сопротивления.

Учитывая значения T и Π , получим

$$M \ddot{q} = -\kappa q^m - \mu \dot{q}. \quad (2.62)$$

Положим $\dot{q} = x_1$, $q = x_2$. В новых переменных уравнение (2.62) будет эквивалентно системе двух уравнений первого порядка

$$M \dot{x}_1 = -\mu x_1 - \kappa x_2^m, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad (2.63)$$

причем по условию $m \geq 2$. В качестве функции Ляпунова возьмем полную механическую энергию

$$V = T + \Pi = \frac{1}{2} M \dot{q}^2 + \frac{\kappa}{m+1} q^{m+1},$$

или, в новых переменных,

$$V = \frac{1}{2} M x_1^2 + \frac{\kappa}{m+1} x_2^{m+1}. \quad (2.64)$$

Найдем полную производную по времени

$$\dot{V} = M x_1 \dot{x}_1 + \kappa x_2^m \dot{x}_2.$$

Внесем сюда значения \dot{x}_1 и \dot{x}_2 из уравнений возмущенного движения (2.63):

$$\dot{V} = x_1 (-\mu x_1 - \kappa x_2^m) + \kappa x_2^m x_1,$$

или, после упрощения,

$$\dot{V} = -\mu x_1^2. \quad (2.65)$$

Рассмотрим теперь возможные случаи.

1. Число κ положительно ($\kappa > 0$), а число m нечетное. Для этого случая V — определительно-положительная функция перемен-

ных x_1 и x_2 ($m + 1$ — число четное), а производная \dot{V} — отрицательная функция относительно совокупности переменных x_1 и x_2 . Согласно теореме Ляпунова об устойчивости движения, можно утверждать, что невозмущенное движение устойчиво, но не асимптотически. Теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости применить нельзя, так как производная \dot{V} отрицательная, но не определенно-отрицательная функция переменных x_1 и x_2 (при $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$ производная $\dot{V} = 0$).

Обратимся к теореме Барбашина — Красовского. Прежде всего, отметим, что функция V , определенная равенством (2.64), удовлетворяет условию (2.46)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x_1, x_2) = \infty.$$

Многообразие K получим, положив $\dot{V} = -\mu x_1^2 = 0$. Это ось x_2 ($x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$). Это многообразие не содержит целых траекторий, так как на нем уравнения (2.63) принимают вид

$$-\kappa x_2^m = 0, \quad \dot{x}_2 = 0,$$

что невозможно (на K переменная $x_2 \neq 0$).

Очевидно, что на K производная $\dot{V} = 0$, а вне K она отрицательна. Таким образом, при сделанных предположениях ($\kappa > 0$, m — нечетное число), выполнены все условия теоремы Барбашина — Красовского § 2.3 и, следовательно, положение равновесия $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ асимптотически устойчиво в целом при любых начальных возмущениях.

2. Число κ положительно ($\kappa > 0$), а число m четное. Функцию V определим теперь следующим образом:

$$V = -\left(\frac{1}{2} M x_1^2 + \frac{\kappa}{m+1} x_2^{m+1}\right). \quad (2.66)$$

Очевидно, что

$$\dot{V} = \mu x_1^2.$$

При $\kappa > 0$ и m четном функция V может принимать положительные значения (например, при $x_1 = 0$ и $x_2 < 0$). На прежнем многообразии K ($x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$) производная $\dot{V} = 0$, а вне K производная $\dot{V} > 0$. Кроме того, многообразию K не принадлежат целые траектории системы. Поэтому выполнены все условия теоремы Н. Н. Красовского § 2.4 и положение равновесия $x_1 = \dot{q} = 0$, $x_2 = q = 0$ неустойчиво.

3. Число κ отрицательно ($\kappa < 0$), а m — любое целое положительное число, не меньшее двух ($m \geq 2$).

Функцию V берем в форме (2.66). При любом целом m и $\kappa < 0$ функция V может принимать положительные значения (например, при $x_1 = 0$ и $x_2 < 0$). Повторяя доказательство случая б), убеждаемся, что при $\kappa < 0$ положение равновесия неустойчиво.

Таким образом, система асимптотически устойчива относительно q и \dot{q} при $\kappa > 0$ и m нечетном. Во всех остальных случаях она неустойчива.

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

§ 3.1. Теорема Лагранжа

Рассмотрим механическую систему с голономными и стационарными связями, положение которой определяется s обобщенными независимыми координатами q_1, \dots, q_s . Как известно, в положении равновесия все обобщенные силы Q_k такой системы равны нулю:

$$Q_1 = 0, \dots, Q_s = 0. \quad (3.1)$$

Если обобщенные силы Q_k зависят от координат q_j и скоростей \dot{q}_j , то для определения положений, в которых система может находиться в равновесии, достаточно внести в равенство (3.1) значения $\dot{q}_j = 0$ и решить полученное уравнения относительно q_1, \dots, q_s .

Для консервативных сил $Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$, где Π — потенциальная энергия системы, и уравнения (3.1) принимают вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \quad (3.2)$$

Решая эти уравнения относительно q_1, \dots, q_s , найдем те значения обобщенных координат, при которых система может находиться в равновесии. Таких положений может оказаться несколько, причем в некоторых из них равновесие может быть устойчивым, а в некоторых неустойчивым. Так, например, простой маятник, подвешенный на стержне, имеет два возможных положения равновесия, из них в нижнем положении равновесие устойчиво, а в верхнем неустойчиво.

Рассмотрим одно из возможных положений равновесия. Будем считать, что в этом положении потенциальная энергия равна нулю. Это всегда можно сделать, так как потенциальная энергия определяется с точностью до аддитивной постоянной. Кроме того, не нарушая общности, можно считать, что в этом положении все обобщенные координаты

ты q_1, \dots, q_s равны нулю (для этого достаточно отсчет координат вести от этого положения). Будем рассматривать устойчивость равновесия относительно обобщенных координат q_1, \dots, q_s и обобщенных скоростей ζ_1, \dots, ζ_s .

Тогда уравнения Лагранжа второго рода

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}, \\ \frac{dq_k}{dt} &= \zeta_k \quad (k = 1, \dots, s), \end{aligned} \quad (3.3)$$

будут уравнениями возмущенного движения. Число уравнений $n = 2s$ и они допускают интеграл энергии

$$T + \Pi = h, \quad (3.4)$$

где T — кинетическая энергия системы.

Лагранжу принадлежит следующая теорема (1788 г.), определяющая достаточные условия устойчивости равновесия консервативных систем ¹⁾.

Теорема. *Если в положении изолированного равновесия консервативной системы с голономными и стационарными связями потенциальная энергия Π имеет минимум, то в этом положении равновесие устойчиво.*

Доказательство. В рассматриваемом положении равновесия потенциальная энергия равна нулю и имеет минимум. Поэтому по крайней мере в достаточно малой окрестности нуля значения функции Π будут положительны. Это означает, что в этой окрестности потенциальная энергия Π представляет определенно-положительную функцию переменных q_j , а полная энергия системы

$$V = T + \Pi \quad (3.5)$$

определенно-положительную функцию обобщенных координат q_1, \dots, q_s и обобщенных скоростей ζ_1, \dots, ζ_s (так как кинетическая энергия T механической системы с голономными и стационарными связями является определенно-положительной квадратичной формой обобщенных скоростей (см., например, [12])).

Полная производная функции V по времени на основании интеграла (3.4) равна нулю. Следовательно, эта функ-

¹⁾ Строгое доказательство теоремы Лагранжа впервые дал Дирихле, поэтому эта теорема часто называется теоремой Лагранжа — Дирихле. Здесь приводится доказательство Ляпунова, вытекающее непосредственно из его прямого метода.

ция удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости, что и доказывает теорему Лагранжа.

Теорема Лагранжа широко используется в приложениях. Как правило, при ее практическом применении удобнее всего разложить потенциальную энергию в ряд по степеням q_1, \dots, q_s , а затем воспользоваться критерием Сильвестра (2.9). В общем виде имеем

$$\Pi = \Pi(0) + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k + \dots,$$

где точками обозначены члены, содержащие q_1, \dots, q_s в степени выше второй.

По условию $\Pi(0) = 0$ (в положении равновесия потенциальная энергия равна нулю); кроме того, в этом положении должны выполняться равенства (3.2). Поэтому

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s c_{kj} q_k q_j + \dots, \quad (3.6)$$

где постоянные коэффициенты

$$c_{ki} = c_{jk} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 \quad (3.7)$$

Если коэффициенты c_{kj} удовлетворяют критерию Сильвестра (2.9), то квадратичная часть равенства (3.6) будет определено-положительной квадратичной формой переменных q_1, \dots, q_s , а вместе с ней будет определено-положительна в окрестности нуля и потенциальная энергия Π . Это означает, что потенциальная энергия Π имеет изолированный минимум и, следовательно, согласно теореме Лагранжа, в рассматриваемом положении равновесие устойчиво.

Пример. Система представляет двойной маятник; тела M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 рассматриваются как материальные точки; массой стержней, сопротивлением воздуха и трением в горизонтальных цилиндрических опорах пренебрегаем; спиральные пружины с жесткостями κ_1 и κ_2 при верхнем вертикальном положении маятников находятся в естественном недеформированном состоянии (рис. 3.1). Считая массы m_1 и m_2 маятников и их длины l_1 и l_2 задан-

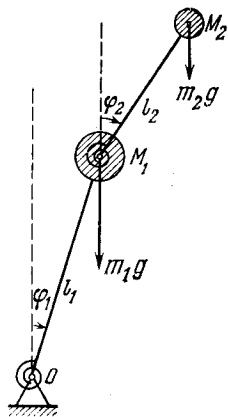


Рис. 3.1

ными, определим жесткости пружин κ_1 и κ_2 так, чтобы в верхнем вертикальном положении равновесие маятников было устойчивым.

Связи системы идеальны, стационарны и голономны, а активные силы, действующие на систему, консервативны. Поэтому здесь применима теорема Лагранжа. Положение маятников будем определять углами φ_1 и φ_2 . Потенциальная энергия Π системы складывается из потенциальной энергии Π_1 пружин и потенциальной энергии Π_2 сил тяжести

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2.$$

Имеем

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \kappa_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} \kappa_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2,$$

$$\Pi_2 = -m_1 g l_1 (1 - \cos \varphi_1) - m_2 g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2)].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \kappa_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} \kappa_2 (\varphi_2^2 - 2\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1^2) - \\ - (m_1 + m_2) g l_1 (1 - \cos \varphi_1) - m_2 g l_2 (1 - \cos \varphi_2). \end{aligned}$$

Пользуясь разложением косинуса в ряд Маклорена:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \dots,$$

получим после группировки

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \{ [\kappa_1 + \kappa_2 - (m_1 + m_2) g l_1] \varphi_1^2 - \\ - 2\kappa_2 \varphi_1 \varphi_2 + (\kappa_2 - m_2 g l_2) \varphi_2^2 \} + \dots, \end{aligned}$$

где точками обозначены члены, содержащие φ_1 и φ_2 в степени выше второй.

Введем обозначения

$$c_{11} = \kappa_1 + \kappa_2 - (m_1 + m_2) g l_1, \quad c_{12} = c_{21} = -\kappa_2, \quad c_{22} = \kappa_2 - m_2 g l_2.$$

Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11} \varphi_1^2 + 2c_{12} \varphi_1 \varphi_2 + c_{22} \varphi_2^2) + \dots$$

Критерий Сильвестра (2.9) в данном примере имеет вид

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0.$$

Вместо этих неравенств можно ввести два других, им эквивалентных (они могут быть получены, в частности, из критерия Сильвестра простой перестановкой индексов):

$$c_{22} > 0, \quad c_{11} c_{12} - c_{12}^2 > 0.$$

Пользуясь значениями c_{kj} , получим

$$\kappa_2 - m_2 g l_2 > 0, \quad (\kappa_2 - m_2 g l_2) [\kappa_1 + \kappa_2 - (m_1 + m_2) g l_1] - \kappa_2^2 > 0.$$

Решая эти неравенства относительно κ_1 и κ_2 , легко найдем

$$\kappa_2 > m_2 g l_2, \quad \kappa_1 > \frac{\kappa_2^2}{\kappa_2 - m_2 g l_2} + (m_1 + m_2) g l_1 - \kappa_2.$$

Положим

$$A = m_2 g l_2, \quad B = (m_1 + m_2) g l_1.$$

Тогда последние неравенства принимают вид

$$\kappa_2 > A, \quad \kappa_1 > \frac{\kappa_2^2}{\kappa_2 - A} + B - \kappa_2.$$

Преобразуем второе неравенство. Имеем

$$\kappa_1 > \frac{\kappa_2^2 - A^2 + A^2}{\kappa_2 - A} + B - \kappa_2 = \kappa_2 + A + \frac{A^2}{\kappa_2 - A} + B - \kappa_2.$$

Теперь условие устойчивости принимает вид

$$\kappa_1 > \frac{A^2}{\kappa_2 - A} + A + B, \quad \kappa_2 > A. \quad (3.8)$$

На рис. 3.2 показана область устойчивости равновесия вертикального положения.

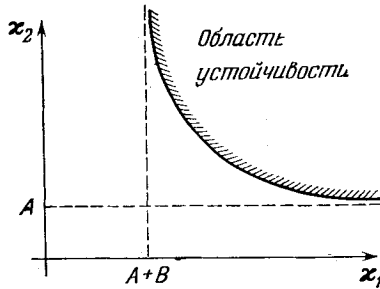


Рис. 3.2

Граница области определяется уравнением $\kappa_1 = \frac{A^2}{\kappa_2 - A} + A + B$ и неравенством $\kappa_2 > A$.

§ 3.2. Обратимость теоремы Лагранжа

Теорема Лагранжа определяет только достаточные условия устойчивости равновесия консервативной системы: если потенциальная энергия имеет в положении изолированного равновесия минимум, то равновесие устойчиво. Ляпунов первый поставил вопрос об обратимости теоремы Лагранжа, а именно: можно ли утверждать, что при отсутствии минимума потенциальной энергии равновесие будет неустойчивым? Ему принадлежат следующие две теоремы, которые приводятся здесь без доказательств (см. [35]).

1. Если в положении изолированного равновесия потенциальная энергия не имеет минимума и его отсутствие определяется членами второго порядка малости без необ-

ходимости рассматривания членов высшего порядка, то равновесие неустойчиво.

2. Если в положении изолированного равновесия потенциальная энергия имеет максимум, определяемый по членам наименее высокого порядка, которые действительно имеются в разложении этой функции, то равновесие неустойчиво.

Н. Г. Четаев обобщил эти теоремы Ляпунова и доказал следующую теорему: если в изолированном положении равновесия потенциальная энергия Π , предполагаемая аналитической функцией q_1, \dots, q_s , не имеет минимума, то равновесие неустойчиво (см. [49]).

На основании приведенных теорем § 3.2 и 3.1 будем в дальнейшем считать, что устойчивому положению равновесия потенциальной системы отвечает минимум потенциальной энергии. Из этого следует, что устойчивое положение равновесия потенциальной системы изолировано.

§ 3.3. Циклические координаты. Преобразование Рауса

Существует обширный класс механических систем, для которых некоторые координаты не входят явным образом в кинетическую энергию системы, а обобщенные силы, соответствующие этим координатам, равны нулю. Такие координаты называются *циклическими*, а остальные координаты системы — *позиционными* или просто *нециклическими*. Так, например, для искусственного спутника Земли (см. пример 2 § 2.6) координата φ — циклическая, а координаты θ и r — позиционные. Для конического маятника (пример 1 § 2.6) координата φ — циклическая, а координата θ — позиционная. Для волчка (пример § 3 § 2.6) координаты α и β — позиционные, а координата φ — циклическая.

Пусть q_1, \dots, q_s — позиционные, а $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ — циклические координаты системы. Запишем уравнения Лагранжа для циклических координат

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = Q_{\varphi_j} \quad (j = 1, \dots, m). \quad (3.9)$$

Кинетическая энергия T системы по определению циклических координат не зависит явным образом от φ_j ; поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = 0.$$

Кроме того, обобщенные силы Q_{ϕ_j} , соответствующие циклическим координатам, равны нулю

$$Q_{\phi_j} = 0.$$

Следовательно, уравнения Лагранжа (3.9) для циклических координат принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, m). \quad (3.10)$$

Эти уравнения допускают очевидные первые интегралы

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_j} = c_j = \text{const} \quad (j = 1, \dots, m), \quad (3.11)$$

показывающие, что *обобщенные импульсы, соответствующие циклическим координатам, остаются постоянными во все время движения.*

Первые интегралы (3.11) можно использовать для преобразования уравнений Лагранжа для позиционных координат. Это преобразование принадлежит Раусу и носит его имя. Не останавливаясь на выводе (см., например, [38, 49]), приведем только результаты.

Правые части первых интегралов (3.11) содержат циклические скорости $\dot{\phi}_j$ линейно, так как T — квадратичная функция скоростей. Найдем из m первых интегралов (3.11) все $\dot{\phi}_j$, выразив их через q_k и ζ_k ; внесем затем их в выражение для кинетической энергии и обозначим результат подстановки через T^* , после чего составим функцию Рауса по следующей формуле:

$$R = T^* - \sum_{k=1}^m c_k \dot{\phi}_k. \quad (3.12)$$

В этом выражении циклические скорости $\dot{\phi}_k$ должны быть заменены их значениями, полученными из первых интегралов (3.11). Уравнения для позиционных координат q_j примут вид (предполагается, что силы, действующие на систему, потенциальны; в противном случае в правой части уравнений будут стоять обобщенные силы Q_j)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (3.13)$$

Функция Рауса не содержит циклических координат ϕ и скоростей $\dot{\phi}$, а зависит только от q_k и ζ_k . Поэтому движение в позиционных координатах q_j можно изучать

по уравнениям (3.13), как бы *игнорируя* циклические координаты (конечно, до тех пор, пока рассматриваются одни уравнения (3.13)). В связи с этим движение в циклических координатах называется *скрытым движением*, а движение в позиционных координатах — *явным движением*.

Остановимся подробно на структуре функции Рауса. В результате всех преобразований, связанных с построением по формуле (3.12), в функции Рауса R можно выделить слагаемое R_2 , содержащее позиционные скорости \dot{q} во второй степени, слагаемое R_1 , содержащее позиционные скорости \dot{q} в первой степени, и слагаемое R_0 , независящее от скоростей \dot{q} :

$$R = R_2 + R_1 + R_0, \quad (3.14)$$

где

$$R_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad (3.15)$$

$$R_1 = \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j. \quad (3.16)$$

В этих равенствах коэффициенты $a_{kj} = a_{jk}$, a_j , а также R_0 — функции позиционных координат q_1, \dots, q_s и постоянных интегрирования c_1, \dots, c_m . Не останавливаясь на доказательстве (см., например, [38]), отметим, что квадратичная форма R_2 является определенно-положительной.

Внесем в уравнения (3.13) значение функции Рауса из формулы (3.14):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (R_2 + R_1 + R_0)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (R_2 + R_1 + R_0)}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Разбивая на отдельные слагаемые и учитывая, что R_0 не зависит от \dot{q} и, следовательно, $\frac{\partial R_0}{\partial \dot{q}} = 0$, получим после группировки

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R_2}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial R_0}{\partial q_j} - \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R_1}{\partial q_j} \right\}. \quad (3.17)$$

Пользуясь формулой (3.16) для R_1 , преобразуем выражение, стоящее в скобках. Имеем

$$\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j = a_j.$$

Учитывая, что a_j зависит от времени t сложным образом через q_1, \dots, q_s , получим по правилам дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_1} = \frac{da_j}{dt} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial a_j}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

Заменим теперь в формуле (3.16) индекс суммирования j на k и продифференцируем по q_j :

$$\frac{\partial R_1}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^s a_k \dot{q}_k = \sum_{k=1}^s \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \dot{q}_k.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R_1}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k = \sum_{k=1}^s g_{jk} \dot{q}_k,$$

где так называемые *гироскопические* коэффициенты g_{jk} определены равенствами

$$g_{jk} = \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j}. \quad (3.18)$$

Теперь уравнения (3.17) приводятся к следующему виду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R_2}{\partial q_j} = - \frac{\partial W}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^s g_{jk} \dot{q}_k \quad (j = 1, \dots, s), \quad (3.19)$$

где

$$W = \Pi - R_0. \quad (3.20)$$

Уравнениям (3.19) можно отнести некоторую систему (она называется *приведенной системой*), в которой функции R_2 и W служат *кинетической* и *потенциальной энергиями*; обобщенные силы этой системы определяются равенствами

$$Q_j = - \frac{\partial W}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^s g_{jk} \dot{q}_k, \quad (3.21)$$

причем $\sum g_{jk} \dot{q}_k$ называются *гироскопическими силами*. Из определения гироскопических коэффициентов g_{jk} видно, что их матрица *кососимметричная*, т. е.

$$g_{jk} = -g_{kj}. \quad (3.22)$$

В этом легко убедиться, поменяв в формуле (3.18) местами индексы k и j . Заметим, что при отсутствии гироскопических сил (это, как правило, бывает при $R_1 = 0$) система называется *гироскопически несвязанной*. Основное свойство гироскопических сил состоит в том, что сумма их работ на действительном перемещении равна нулю. Это свойство лежит в основе их определения, данного Томсоном и Тетом (см. [58]). Гироскопические силы встречаются не только в системах с циклическими координатами (частный случай их — системы, содержащие гироскопы), но и в различных других физических системах (см. примеры § 6.7).

Из дифференциальных уравнений (3.19) приведенной системы легко получить интеграл энергии

$$R_2 + W = R_2 + \Pi - R_0 = \text{const.} \quad (3.23)$$

Этот интеграл может быть получен формальными методами, но физически он очевиден — гироскопические силы, действующие на приведенную систему, не производят работы и, следовательно, они не могут изменить общий баланс энергии.

§ 3.4. Стационарное движение и условия его устойчивости

При некоторых условиях материальная система, имеющая m циклических и s позиционных координат, может совершать *стационарное движение*, которое состоит в том, что все позиционные координаты и циклические скорости сохраняют постоянные значения, равные начальным. Условия, при которых осуществляется стационарное движение, легко получаются из следующих очевидных соображений.

Согласно определению в стационарном движении, все позиционные координаты сохраняют постоянное значение:

$$q_k(t) = q_{k0} = \text{const} \quad (k = 1, \dots, s).$$

Это означает, что приведенная система находится в покое. Но для этого, согласно равенствам (3.1), необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы (3.21) этой системы равнялись нулю, т. е.

$$Q_j = - \left(\frac{\partial W}{\partial q_j} \right)_{q_0} - \sum_{k=1}^s g_{jk} \zeta_k = 0,$$

или, учитывая, что в стационарном движении (равновесии приведенной системы) все $\zeta_k = 0$:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_j} \right)_{q_0} = 0 \quad (j = 1, \dots, s). \quad (3.24)$$

Принимая во внимание выражение (3.20) для потенциальной энергии W приведенной системы, этим условием можно придать и другой вид, а именно:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_{q_0} = \left(\frac{\partial R_0}{\partial q_j} \right)_{q_0} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (3.25)$$

Таким образом, для осуществимости стационарного движения необходимо и достаточно, чтобы начальные значения позиционных координат q_j удовлетворяли s равенствам (3.24) и все начальные значения позиционных скоростей \dot{q}_j равнялись нулю (при $q = \text{const}$ и $\dot{q} = 0$ все циклические скорости $\dot{\phi}$ будут сохранять постоянные значения). Отметим, что в функцию R_0 входят постоянные c_j циклических интегралов (3.11), поэтому значения q_{0j} в стационарном движении зависят от циклических скоростей $\dot{\phi}$, содержащихся в c_j .

Перейдем теперь к определению условий устойчивости стационарного движения, которое будем считать за невозмущенное движение. Не нарушая общности, можно считать, что в стационарном движении все позиционные координаты q_j равны нулю. Тогда уравнения движения (3.19) приведенной системы будут дифференциальными уравнениями возмущенного движения относительно позиционных координат q_j и скоростей \dot{q}_j . Раусу принадлежат несколько теорем об устойчивости стационарного движения. Здесь приводится одна из них, получившая наибольшее распространение.

Теорема Рауса. *Если в стационарном движении потенциальная энергия $W = \Pi - R_0$ приведенной системы имеет минимум, то это движение устойчиво относительно позиционных координат q_j и скоростей \dot{q}_j , по крайней мере для возмущений, не нарушающих значения циклических интегралов (3.11).*

Доказательство. При стационарном движении исходной системы приведенная система находится в покое. Кроме того, для этой системы имеет место интеграл энергии (3.23). Поэтому для доказательства теоремы Рауса достаточно повторить доказательство теоремы Лагранжа.

Теорема Рауса в данной формулировке справедлива, конечно, для возмущений, при которых не нарушаются циклические интегралы (3.11) (так как последние входят в потенциальную энергию приведенной системы через функцию R_0). Ляпунову принадлежит существенное дополнение к этой теореме, устраняющее этот недостаток. Ниже приводится без доказательства дополнение Ляпунова в форме следующей теоремы ¹⁾.

Теорема. *Если потенциальная энергия W приведенной системы имеет минимум как при данных $p_j = c_j$, отвечающих рассматриваемому стационарному движению, так и при всяких достаточно близких к данным значениях $p_j = c_j + \eta_j$, где η_j малы по модулю, причем значения переменных q_k , обращающие ее в минимум, суть непрерывные функции величин p_j , то стационарное движение устойчиво относительно q_k и \dot{q}_k .*

Примечание. Циклические интегралы (3.11) содержат позиционные \dot{q} и циклические $\dot{\phi}$ скорости линейно. Поэтому из устойчивости стационарного движения относительно величин q_k и \dot{q}_k следует устойчивость и относительно циклических скоростей $\dot{\phi}$ (но не координат ϕ).

Необходимо отметить, что устойчивость стационарного движения может быть осуществлена и при отсутствии минимума потенциальной энергии (за счет гироскопических сил). Поэтому распространить теоремы Ляпунова и Четаева об обратимости теоремы Лагранжа на стационарное движение нельзя. Однако для гироскопически несвязанной системы справедлива следующая теорема, являющаяся перефразировкой теоремы Четаева об обратимости теоремы Лагранжа.

Теорема. *Если для изолированного стационарного движения гироскопически несвязанной системы при фиксированных циклических интегралах (3.11) функция W , предполагаемая аналитической функцией переменных q , не имеет минимума, то стационарное движение неустойчиво.*

В заключение отметим, что для практического применения теоремы Рауса достаточно заметить, что при выпол-

¹⁾ А. М. Ляпунов приводит свое дополнение к теореме Рауса без доказательства. В. В. Румянцев в работе [46] доказал это дополнение в предположении непрерывности функции W . В этой же работе приводится наиболее полное изложение теории устойчивости стационарных движений; часть результатов принадлежит В. В. Румянцеву. В работах [24а, 53б, 53в] приводятся условия обратимости теоремы Рауса и, как следствие условия обратимости, теоремы Лагранжа — Дирихле.

нении ее условий функция $W - W_0$ будет определенно-положительной (W_0 — значение функции W в стационарном движении). Поэтому здесь рационально использовать обычный прием разложения этой функции в ряд с последующим применением критерия Сильвестра.

§ 3.5. Примеры

В примерах 1 и 2 § 2.6 устойчивость стационарных движений конического маятника и ИСЗ была доказана с помощью связки интегралов. Получим теперь эти же результаты с помощью теоремы Рауса.

Пример 1. Устойчивость стационарного движения конического маятника. Ранее были найдены следующие выражения для кинетической T и потенциальной Π энергий маятника (см. рис. 2.14 и формулы на с. 58):

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta), \quad \Pi = -mgl \cos \theta.$$

Из этих выражений видно, что координата ψ циклическая (она входит в кинетическую энергию только через скорость $\dot{\psi}$ и не содержится в потенциальной энергии), а координата θ позиционная. Составим, согласно формуле (3.11), циклический интеграл

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\psi} = c. \quad (3.26)$$

Отсюда найдем $\dot{\psi}$ и внесем его в выражение для кинетической энергии:

$$\dot{\psi} = \frac{c}{ml^2 \sin^2 \theta}, \quad T^* = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{ml^2 \sin^2 \theta}.$$

Пользуясь формулой (3.12), составим функцию Рауса

$$R = T^* - c\dot{\psi} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{ml^2 \sin^2 \theta} - c \cdot \frac{c}{ml^2 \sin^2 \theta}$$

или

$$R = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{ml^2 \sin^2 \theta}.$$

Отсюда видно, что (см. равенство (3.14))

$$R_2 = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2, \quad R_1 = 0, \quad R_0 = -\frac{1}{2} \frac{c^2}{ml^2 \sin^2 \theta}$$

Так как $R_1 = 0$, то система гироскопически не связана. Согласно общей теории, составим потенциальную энергию $W = \Pi - R_0$ приведенной системы:

$$W = -mgl \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{c^2}{ml^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.27)$$

Обозначим значение угла θ в установившемся движении через α , а значение циклической скорости $\dot{\psi}$ через ω . Условие (3.24) осуществимости стационарного движения принимает вид

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_{\theta=\alpha} = mgl \sin \alpha - \frac{c^2 \cos \alpha}{ml^2 \sin^3 \alpha} = 0 \quad (3.28)$$

или, после преобразований,

$$\frac{\sin^4 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{c^2}{m^2 gl^3}. \quad (3.29)$$

Это равенство определяет однопараметрическое семейство решений уравнения (3.28), причем соответствующая величина угловой скорости конического маятника определяется равенством (3.26)

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \omega = \frac{c}{ml^2 \sin^2 \alpha}. \quad (3.30)$$

Исключая из равенств (3.29) и (3.30) параметр c , найдем

$$\omega^2 \cos \alpha = \frac{g}{l}.$$

Как уже отмечалось в примере 1 § 2.6, это условие стационарного движения конического маятника может быть получено из элементарных соображений.

Примем стационарное движение маятника за невозмущенное и исследуем его устойчивость с помощью теоремы Рауса с дополнением Ляпунова. Положим $\theta = \alpha + x$, внесем в выражение (3.27) для функции W и разложим разность $W - W_0$ в ряд по степеням x :

$$W - W_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_{\theta=\alpha} \cdot x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\alpha} \cdot x^2 + \dots,$$

или, учитывая равенство (3.28),

$$W - W_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\alpha} x^2 + \dots,$$

где точками обозначены члены, содержащие x в степени выше второй.

Вычисляя производную, найдем

$$W - W_0 = \frac{1}{2} \left[mgl \cos \alpha + \frac{c^2}{ml^2} \frac{\sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha} \right] x^2 + \dots$$

Так как множитель при x^2 положителен, то функция W имеет в стационарном движении минимум. Кроме того, для всякого $\theta = \alpha \neq \frac{\pi}{2}$ решение (3.29) непрерывно зависит от постоянной c интеграла (3.26), а циклическая скорость $\dot{\psi} = \omega$ непрерывно зависит от той же постоянной при $\theta = \alpha \neq 0$. Поэтому на основании теоремы Рауса и дополнения Ляпунова стационарное движение конического маятника устойчиво относительно θ , $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$.

Пример 2. Устойчивость стационарных движений центра масс искусственного

спутника Земли [46]. В примере 2 § 2.6 были получены следующие выражения для кинетической T и потенциальной Π энергий искусственного спутника Земли (см. рис. 1.5 и формулы на с. 26):

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad \Pi = -\mu \frac{m}{r}.$$

Из этих выражений видно, что координата φ циклическая, а координаты r и θ позиционные. Циклической координате φ соответствует интеграл площадей

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi} = c. \quad (3.31)$$

Из этого равенства найдем производную $\dot{\varphi}$ и внесем ее в выражение для кинетической энергии:

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{mr^2 \cos^2 \theta}, \quad T^* = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \frac{c^2}{mr^2 \cos^2 \theta}$$

Пользуясь формулой (3.12), составим функцию Рауса

$$R = T^* - c\dot{\varphi} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \frac{c^2}{mr^2 \cos^2 \theta} - c \frac{c}{mr^2 \cos^2 \theta}$$

или

$$R = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{1}{2} \frac{c^2}{mr^2 \cos^2 \theta}.$$

Отсюда видно, что (см. равенство (3.14))

$$R_2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad R_1 = 0, \quad R_0 = -\frac{1}{2} \frac{c^2}{mr^2 \cos^2 \theta}.$$

Так как $R_1 = 0$, то система гироскопически не связана.

Согласно общей теории, составим потенциальную энергию $W = \Pi - R_0$ приведенной системы

$$W = -\mu \frac{m}{r} + \frac{1}{2} \frac{c^2}{mr^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.32)$$

Условия (3.24) осуществимости стационарного движения принимают вид

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \mu \frac{m}{r^2} - \frac{c^2}{mr^3 \cos^2 \theta} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{c^2 \sin \theta}{mr^2 \cos^3 \theta} = 0. \quad (3.33)$$

Эти уравнения имеют однопараметрическое семейство решений

$$r = r_0 = \frac{c^2}{\mu m^2}, \quad (3.34)$$

$$\theta = \theta_0 = 0, \quad (3.35)$$

причем соответствующая угловая скорость вращения радиуса-вектора центра масс спутника определяется из интеграла (3.31):

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \omega = \frac{c}{mr_0^2}. \quad (3.36)$$

Как было уже показано в примере 2 § 2.6, стационарные движения искусственного спутника представляют собой движения в плоскости Oxy по круговым орбитам радиуса r_0 с постоянными угловыми скоростями. Исключая из равенств (3.34) и (3.36) параметр c , найдем

$$\omega^2 r_0^3 = \mu.$$

Эта формула была получена ранее из простых физических соображений (см. равенство (1.30)).

Примем стационарное движение спутника за невозмущенное и исследуем его устойчивость с помощью теоремы Рауса и дополнения Ляпунова. Положим $r = r_0 + x$, внесем это в выражение (3.32) для функции W и разложим разность $W - W_0$ в ряд по степеням x и θ :

$$W - W_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)_0 x + \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_0 \theta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right)_0 x^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} \right)_0 x \theta + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)_0 \theta^2 \right] + \dots,$$

или, учитывая равенства (3.33),

$$W - W_0 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right)_0 x^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} \right)_0 x \theta + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)_0 \theta^2 \right] + \dots$$

Имеем

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right)_0 = -2\mu \frac{m}{r_0^3} + 3 \frac{c^2}{mr_0^4}, \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)_0 = \frac{c^2}{mr_0^2}.$$

Следовательно,

$$W - W_0 = \frac{1}{2} \left[\left(-2\mu \frac{m}{r_0^3} + 3 \frac{c^2}{mr_0^4} \right) x^2 + \frac{c^2}{mr_0^2} \theta^2 \right] + \dots$$

Так как, согласно равенству (3.34), в установившемся движении $c^2 = \mu m^2 r_0$, то будем иметь

$$W - W_0 = \frac{1}{2} \mu \frac{m}{r_0} \left(\frac{1}{r_0^2} x^2 + \theta^2 \right) + \dots$$

Из этого выражения видно, что функция W имеет в стационарном движении минимум. Кроме того, для всякого $r_0 \neq 0$ решение (3.34) непрерывно зависит от постоянной c интеграла (3.31). Поэтому на основании теоремы Рауса и дополнения Ляпунова стационарное движение спутника устойчиво относительно r , \dot{r} , θ , $\dot{\theta}$ и $\dot{\phi}$.

Пример 3. Устойчивость регулярной прецессии тяжелого гироскопа. Рассмотрим симметричное твердое тело, имеющее одну неподвижную точку O и движущееся под действием силы тяжести. Положение оси симметрии z тела будем определять углом прецессии ψ и углом нутации θ ; угол собственного вращения обозначим через ϕ (рис. 3.3). Кинетическая T и потенциальная Π энергии такого тела определяются равенствами

$$T = \frac{1}{2} J_x (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} J_z \omega_z^2, \quad \Pi = Mgh \cos \theta,$$

где $J_x = J_y$ и J_z — моменты инерции тела относительно осей Релая x, y, z , а $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции угловой скорости тела на те же оси, M — масса тела, h — расстояние от его центра тяжести до точки опоры.

Пользуясь рис. 3.4, легко найдем

$$\omega_x = -\dot{\psi} \sin \theta, \quad \omega_y = \dot{\theta}, \quad \omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta.$$

Внося эти выражения для $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ в кинетическую энергию T , получим

$$T = \frac{1}{2} J_x (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} J_z (\dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi})^2.$$

Так как координаты ϕ и ψ входят в кинетическую энергию T только через свои скорости $\dot{\phi}$ и $\dot{\psi}$, а потенциальная энергия Π от них

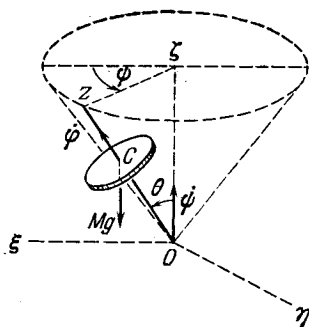


Рис. 3.3

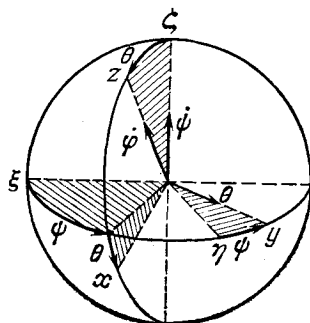


Рис. 3.4

не зависит, то эти координаты циклические, а θ — позиционная. Циклическим координатам соответствуют два первых интеграла

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= J_z (\dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi}) = J_z n, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= J_x \sin^2 \theta \dot{\psi} + J_z (\dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi}) \cos \theta = m, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где $J_z n$ и m — постоянные интегрирования (множитель J_z введен для удобства).

Эти интегралы выражают постоянство кинетического момента относительно осей z и ζ соответственно. Из равенств (3.37) найдем циклические скорости

$$\dot{\psi} = \frac{m - J_z n \cos \theta}{J_x \sin^2 \theta}, \quad \dot{\phi} = n - \frac{m - J_z n \cos \theta}{J_x \sin^2 \theta} \cos \theta.$$

Внесем найденные значения $\dot{\psi}$ и $\dot{\phi}$ в кинетическую энергию. После очевидных преобразований получим

$$T^* = \frac{1}{2} J_x \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(m - J_z n \cos \theta)^2}{J_x \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} J_z n^2.$$

Пользуясь формулой (3.12), составим функцию Рауса (в рассматриваемом случае $c_1 = J_2 n$ и $c_2 = m$):

$$R = T^* - J_2 n \dot{\varphi} - m \dot{\psi} = \frac{1}{2} J_x \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(m - J_2 n \cos \theta)^2}{J_x \sin^2 \theta} - \\ - J_2 n \left[n - \frac{m - J_2 n \cos \theta}{J_x \sin^2 \theta} \cos \theta \right] - m \frac{m - J_2 n \cos \theta}{J_x \sin^2 \theta},$$

или, группируя члены и отбрасывая несущественную постоянную $-1/2 J_2 n^2$,

$$R = \frac{1}{2} J_x \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \frac{(m - J_2 n \cos \theta)^2}{J_x \sin^2 \theta}.$$

Сравнивая с равенством (3.14), найдем

$$R_2 = \frac{1}{2} J_x \dot{\theta}^2, \quad R_1 = 0, \quad R_0 = -\frac{1}{2} \frac{(m - J_2 n \cos \theta)^2}{J_x \sin^2 \theta}.$$

Составим далее потенциальную энергию $W = \Pi - R_0$ приведенной системы

$$W = Mgh \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{(m - J_2 n \cos \theta)^2}{J_x \sin^2 \theta}$$

и напомним условие осуществимости стационарного движения (3.24):

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_0 = -Mgh \sin \theta_0 + \frac{(m - J_2 n \cos \theta_0)(J_2 n - m \cos \theta_0)}{J_x \sin^3 \theta_0} = 0. \quad (3.38)$$

Считая известными постоянные m и n , из этого уравнения легко найти угол $\theta = \theta_0$. Для этого достаточно представить данное уравнение в следующей форме:

$$Mgh J_x \cos^4 \theta_0 - (Mgh J_x + J_2 n m) \cos^2 \theta_0 + \\ + (J_2^2 n^2 + m^2) \cos \theta_0 + Mgh J_x - J_2 n m = 0. \quad (3.39)$$

Это уравнение определяет семейство решений, зависящее от двух параметров m и n . Для практических целей удобнее задавать просто начальные условия

$$\text{при } t = 0: \theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0, \quad \varphi = \varphi_0.$$

Если теперь выразить постоянные интегрирования m и n по формулам (3.37) через эти начальные условия, то уравнение (3.39) легко приводится к виду

$$\dot{\psi}_0^2 (J_x - J_2) \cos \theta_0 - J_2 \dot{\varphi}_0 \dot{\psi}_0 + Mgh = 0.$$

Это равенство устанавливает связь между начальными условиями движения, при которых осуществляется стационарное движение. Последнее состоит в том, что гироскоп равномерно вращается с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ вокруг оси симметрии z , а ось z равномерно вращается вокруг вертикальной оси ζ с угловой скоростью $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$, описывая круговой конус с углом раствора, равным $2\theta_0$ (см. рис. 3.3). Такое движение называется *регулярной прецессией*.

Исследуем устойчивость регулярной прецессии. Для этого положим $\theta = \theta_0 + x$, внесем это в потенциальную энергию W при-

веденной системы и разложим функцию $W - W_0$ в ряд по степеням x :

$$W - W_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta_0} x^2 + \dots,$$

где точками обозначены члены, содержащие x в степени выше второй. Первое слагаемое на основании равенства (3.38) выпадает, а второе после несложных преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta_0} x^2 &= \\ &= \frac{1}{2J_x} \frac{(m - J_z n \cos \theta_0)^2 \sin^2 \theta_0 + (J_z n + J_z n \cos^2 \theta_0 - 2m \cos \theta_0)^2}{\sin^4 \theta_0} x^2. \end{aligned}$$

Так как при всех значениях θ_0 , не равных 0 или π , коэффициент при x^2 положителен, то функция W имеет в стационарном движении минимум. Кроме того, для всех θ_0 , не равных 0 или π , решение уравнения (3.38) непрерывно зависит от постоянных m и n интегралов (3.37) (корни алгебраического относительно $\cos \theta_0$ уравнения (3.39) непрерывно зависят от коэффициентов уравнения). Поэтому на основании теоремы Рауса и дополнения Ляпунова регулярная прецессия устойчива относительно θ , $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ и $\dot{\phi}$.

Пример 4. Устойчивость равновесного положения оси вращающегося уравновешенного ротора, установленного в нелинейных опорах [26а]. Рассмотрим абсолютно жесткий уравновешенный ротор с вертикальной осью вращения, установленный в жестко укрепленных на неподвижном основании упругих подшипниках. Будем предполагать, что подшипники обладают в общем случае нелинейной податливостью, в результате чего ось ротора может перемещаться плоскопараллельно¹⁾. Собственное вращение происходит вокруг оси материальной симметрии (соответствующие центробежные моменты инерции и эксцентриситет e равны нулю), реакции подшипников приводятся к одной равнодействующей F_0 , зависящей от радиального перемещения ρ оси O ротора и направленной к точке O_1 пересечения плоскости движения центра масс с осью недеформированных подшипников (рис. 3.5 — точки O и C при $e = 0$ совпадают). Очевидно, что любая реакция $F_0(\rho)$ должна обращаться в нуль при отсутствии деформации ($\rho = 0$) и в области допустимых деформаций возрастать с увеличением ρ , т. е. для любой реакции $F_0(\rho)$ должны выполняться

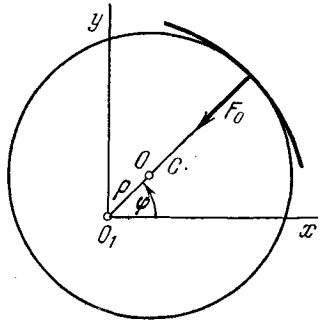


Рис. 3.5

¹⁾ Этим условиям удовлетворяет также движущийся плоскопараллельно уравновешенный ротор, укрепленный на безынерционном гибком валу, установленном в жестких вертикальных опорах.

условия

$$F_0(0) = 0, \quad \frac{dF_0}{d\rho} > 0 \quad (\rho > 0), \quad (3.40)$$

кроме того, производная $dF_0/d\rho$ должна быть ограничена при $\rho = 0$, а производная $d^2F/d\rho^2$ — непрерывна в тех же пределах.

Этим условиям удовлетворяют, в частности, линейная реакция $F_0 = c\rho$, нелинейные жесткие или мягкие реакции вида $F_0 = c\rho + b\rho^2 + a\rho^3$, реакции $F_0 = a_0\rho^\alpha$ ($\alpha > 1$) и др. Заметим, что для шариковых подшипников большинство авторов принимает $F_0 = a_0\rho^\alpha$, где $\alpha = 3/2$ (формула Герца).

Очевидно, что потенциальная энергия упругой реакции

$$\Pi(\rho) = \int_0^\rho F_0(\rho) d\rho$$

в положении равновесия ($\rho = 0$) имеет изолированный минимум ($\Pi(0) = 0$ и $\Pi(\rho) > 0$ при $\rho > 0$).

В сделанных предположениях о материальной симметрии оси ротора движение центра масс и вращательное движение не зависят друг от друга и их можно изучать отдельно.

Рассмотрим вопрос об устойчивости равновесного положения оси вращающегося ротора ($\rho = 0$), сделав предварительно одно тривиальное, но вместе с тем важное замечание: координаты и их скорости должны быть определены для каждого состояния системы. При исследовании стационарного движения неуравновешенного ротора, установленного в нелинейных подшипниках (см. пример 5 § 4.5), удобно пользоваться полярными координатами. Но в положении равновесия радиус ρ центра масс C ротора и его скорость $\dot{\rho}$ равны нулю ($\rho = 0, \dot{\rho} = 0$), а полярный угол φ и угловая скорость $\dot{\varphi}$ не имеют смысла. Кроме того, в полярных координатах уравнения движения оси ротора (они являются одновременно и уравнениями возмущенного движения около положения равновесия) имеют вид

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 = -F(\rho), \quad \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = 0.$$

При $\rho = 0$ и любом φ эти уравнения обращаются в тождества, т. е. они имеют в положении равновесия бесчисленное множество решений, что нарушает основное требование о единственности решений уравнений (1.1). Поэтому для анализа устойчивости равновесного положения оси уравновешенного ротора нельзя пользоваться полярными координатами. В связи с этим введем обычные прямоугольные координаты x и y точки O , которые и будут характеризовать отклонение оси ротора от положения равновесия в неподвижной системе координат x, y .

Кинетическая и потенциальная энергии определяются равенствами

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \Pi(x, y) = \int_0^\rho F(\rho) d\rho, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Так как потенциальная энергия при $x = 0, y = 0$ имеет изолированный минимум, то на основании теоремы Ляпунова заключаем, что равновесное положение оси уравновешенного ротора устойчиво относительно x, y, \dot{x} и \dot{y} ; следовательно, оно устойчиво и относительно $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

§ 4.1. Постановка задачи

Во многих случаях, особенно в приложениях, устойчивость движения исследуется по уравнениям первого приближения. Это объясняется не только простотой метода, но также и тем, что весьма часто наши знания процессов, происходящих в реальных системах, позволяют надежно определить только первые линейные члены. Однако, как было показано в § 1.2 (см. пример на с. 20—21), уравнения первого приближения могут дать иногда совершенно неверное заключение об устойчивости движения. Поэтому естественно возникает вопрос об определении условий, при выполнении которых уравнения первого приближения дают правильный ответ об устойчивости движения. В общем виде задача ставится следующим образом.

Даны уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + X_1, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + X_n, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где нелинейные члены X_1, \dots, X_n содержат x_1, \dots, x_n в степени выше первой (в этой главе вместо X_k^* будем писать просто X_k).

Требуется определить условия, при которых заключение об устойчивости движения можно составить по уравнениям первого приближения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (4.2)$$

при любых нелинейных членах X_1, \dots, X_n .

Впервые эта задача была поставлена А. М. Ляпуновым. Ему же принадлежит ее полное решение для автономных систем, когда все коэффициенты a_{kj} — постоянные числа, а также для многих случаев неавтономных систем при a_{kj} , зависящих от времени t ,

§ 4.2. Предварительные замечания

В этом параграфе, не определяя вида общего решения уравнений первого приближения, ограничимся напоминанием метода построения характеристического уравнения и некоторыми другими предварительными замечаниями, которые понадобятся в дальнейшем.

Для автономной системы (см. с. 21) все коэффициенты a_{kj} уравнений (4.2) — постоянные числа. Частное решение этих уравнений ищется в форме

$$x_1 = A_1 e^{\lambda t}, \dots, x_n = A_n e^{\lambda t}, \quad (4.3)$$

где A_1, \dots, A_n, λ — постоянные числа.

Дифференцируя равенства (4.3) по времени, получим:

$$\dot{x}_1 = A_1 \lambda e^{\lambda t}, \dots, \dot{x}_n = A_n \lambda e^{\lambda t}.$$

Внесем эти выражения для производных $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$ и выражения для x_1, \dots, x_n из равенств (4.3) в уравнения (4.2) и сократим их на не равный нулю общий множитель $e^{\lambda t}$. Тогда, после группировки членов, будем иметь

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) A_1 + a_{12} A_2 + \dots + a_{1n} A_n &= 0, \\ a_{21} A_1 + (a_{22} - \lambda) A_2 + \dots + a_{2n} A_n &= 0, \\ \dots & \\ a_{n1} A_1 + a_{n2} A_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) A_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Так как эта система линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных A_1, \dots, A_n должна иметь решение, отличное от нуля (в противном случае все $x_k \equiv 0$), то определитель этой системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.5)$$

Полученное уравнение относительно λ называется *характеристическим уравнением*, а соответствующий определитель — *характеристическим определителем*.

Характеристическое уравнение содержит неизвестное число λ в степени n . Следовательно, оно имеет n корней

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Если среди корней характеристического уравнения нет равных (корни простые), то всегда существует такое

неособенное линейное преобразование

$$z_k = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} x_j \quad (k = 1, \dots, n), \quad (4.6)$$

где α_{kj} — некоторые постоянные числа, которое приводит уравнения первого приближения (4.2) к виду

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1, \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{z}_n &= \lambda_n z_n. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Переменные z_1, \dots, z_n называются *каноническими переменными* (общий случай преобразования линейных дифференциальных уравнений к каноническим переменным при наличии кратных корней характеристического уравнения рассматривается в гл. V). Если применить преобразование (4.6) к уравнениям возмущенного движения (4.1), то получим

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + Z_1, \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 + Z_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{z}_n &= \lambda_n z_n + Z_n. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В этих уравнениях Z_1, \dots, Z_n — нелинейные члены, содержащие z_1, \dots, z_n в степени, выше первой.

Каждому комплексному корню $\lambda = \nu + i\mu$ характеристического уравнения (4.5) отвечает сопряженный корень $\bar{\lambda} = \nu - i\mu$ (ν и μ — вещественные постоянные числа); им соответствуют комплексно-сопряженные канонические переменные $z = u + iv$ и $\bar{z} = u - iv$, где u и v — вещественные функции времени t . Вещественным корням λ характеристического уравнения (4.5) отвечают вещественные канонические переменные z .

Так как коэффициенты α_{kj} преобразования (4.6) постоянные числа, то из устойчивости (неустойчивости) невозмущенного движения относительно переменных x_k следует устойчивость (неустойчивость) относительно канонических переменных z_k и наоборот.

Предположим теперь, что система линейна, то есть дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид уравнений (4.2) или в канонических переменных — уравнений (4.7). В сделанных предположениях (корни характеристического уравнения простые) диффе-

ренциальные уравнения (4.7) независимы друг от друга. Они интегрируются элементарно и их общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} z_1 &= z_{01} e^{\lambda_1 t}, \\ &\dots \dots \dots \\ z_n &= z_{0n} e^{\lambda_n t}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где z_{01}, \dots, z_{0n} — значения переменных z_1, \dots, z_n при $t = 0$.

Пусть $\lambda_k = \nu_k + i\mu_k$ — корень характеристического уравнения (если $\nu_k \neq 0$ и $\mu_k \neq 0$, то корень комплексный, при $\nu_k = 0$ и $\mu_k \neq 0$ корень чисто мнимый, при $\mu_k = 0$ вещественный и при $\nu_k = \mu_k = 0$ нулевой). Имеем

$$|e^{\lambda_k t}| = |e^{(\nu_k + i\mu_k)t}| = e^{\nu_k t} |e^{i\mu_k t}|$$

или, учитывая, что $|e^{i\mu_k t}| = 1$ при любых μ_k и t ,

$$|e^{\lambda_k t}| = e^{\nu_k t}. \quad (4.10)$$

Из этого равенства следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |e^{\lambda_k t}| &\rightarrow 0, \quad \text{если } \nu_k < 0, \\ |e^{\lambda_k t}| &= 1, \quad \text{если } \nu_k = 0, \\ |e^{\lambda_k t}| &\rightarrow \infty, \quad \text{если } \nu_k > 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из общего решения (4.9) и предельных равенств (4.11) непосредственно вытекают следующие теоремы об устойчивости движения *линейной автономной системы, имеющей простые корни характеристического уравнения* (случай кратных корней рассматривается в гл. V):

1. *Если вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны (все $\nu_k < 0$), то невозмущенное движение асимптотически устойчиво (все $z_k \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$);*

2. *Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один, вещественная часть которого положительна, то невозмущенное движение неустойчиво (хотя бы одно $z_k \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$);*

3. *Если вещественные части некоторых корней характеристического уравнения равны нулю, а вещественные части остальных корней отрицательны, то невозмущенное движение устойчиво, но не асимптотически (все z_k ограничены, и часть из них стремится к нулю)¹⁾.*

В следующих параграфах этой главы рассматривается влияние нелинейных членов.

¹⁾ Первые два вывода справедливы и для кратных корней характеристического уравнения.

§ 4.3. Основные теоремы об устойчивости по первому приближению

Теорема Ляпунова об устойчивости движения по первому приближению. *Если вещественные части всех корней характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от членов выше первого порядка малости.*

Доказательство. Сформулированная теорема Ляпунова справедлива как для случая кратных, так и для случая простых корней характеристического уравнения (4.5). Учитывая характер настоящего руководства, мы ограничимся рассмотрением случая простых корней (полное доказательство можно найти, например, в книгах А. М. Ляпунова, Н. Г. Четаева, И. Г. Малкина (см. [35, 49, 37])). Итак, будем считать, что все корни характеристического уравнения простые. Так как вариации x_1, \dots, x_n связаны с каноническими переменными z_1, \dots, z_n линейным преобразованием (4.6) при постоянных α_{kj} , то достаточно доказать, что в условиях теоремы невозмущенное движение асимптотически устойчиво относительно переменных z_1, \dots, z_n .

Пусть часть корней характеристического уравнения комплексно-сопряженные, а часть вещественные. Для определенности будем считать, что имеются две пары комплексно-сопряженных корней. Занумеруем все корни следующим образом:

комплексно-сопряженные корни

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \nu_1 + i\mu_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \nu_1 - i\mu_1, \\ \lambda_3 &= \nu_2 + i\mu_2, \lambda_4 = \bar{\lambda}_3 = \nu_2 - i\mu_2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

вещественные корни

$$\lambda_5, \lambda_6, \dots, \lambda_n.$$

Комплексно-сопряженным корням λ_1, λ_2 и λ_3, λ_4 будут отвечать комплексно-сопряженные канонические переменные z_1, z_2 и z_3, z_4

$$\begin{aligned} z_1 &= u_1 + iv_1, z_2 = \bar{z}_1 = u_1 - iv_1, \\ z_3 &= u_2 + iv_2, z_4 = \bar{z}_3 = u_2 - iv_2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где u_1, u_2, v_1, v_2 — вещественные функции времени t . Вещественным корням $\lambda_5, \lambda_6, \dots, \lambda_n$ отвечают вещественные канонические переменные z_5, z_6, \dots, z_n .

Составим функцию Ляпунова в следующем виде ¹⁾:

$$V = \frac{1}{2} (z_1 z_2 + z_3 z_4 + z_5^2 + z_6^2 + \dots + z_n^2). \quad (4.14)$$

Отметим прежде всего, что функция V является определенно-положительной вещественной функцией переменных $u_1, v_1, u_2, v_2, z_5, \dots, z_n$. Это следует из равенств

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= z_1 \bar{z}_1 = (u_1 + iv_1)(u_1 - iv_1) = u_1^2 + v_1^2, \\ z_3 z_4 &= z_3 \bar{z}_3 = (u_2 + iv_2)(u_2 - iv_2) = u_2^2 + v_2^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Вычислим производную \dot{V} функции V

$$\dot{V} = \frac{1}{2} (\dot{z}_1 z_2 + z_1 \dot{z}_2 + \dot{z}_3 z_4 + z_3 \dot{z}_4) + z_5 \dot{z}_5 + \dots + z_n \dot{z}_n.$$

Внесем сюда значения \dot{z}_k из уравнений (4.8)

$$\begin{aligned} \dot{V} = \frac{1}{2} [(\lambda_1 z_1 + Z_1) z_2 + z_1 (\lambda_2 z_2 + Z_2) + (\lambda_3 z_3 + Z_3) z_4 + \\ + z_3 (\lambda_4 z_4 + Z_4)] + z_5 (\lambda_5 z_5 + Z_5) + \dots + z_n (\lambda_n z_n + Z_n) \end{aligned}$$

или, группируя члены,

$$\begin{aligned} \dot{V} = \frac{1}{2} [(\lambda_1 + \lambda_2) z_1 z_2 + (\lambda_3 + \lambda_4) z_3 z_4] + \\ + \lambda_5 z_5^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + Z, \end{aligned}$$

где Z — совокупность членов, содержащих z_1, \dots, z_n в степени выше второй. Так как, согласно равенствам (4.12),

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\nu_1, \quad \lambda_3 + \lambda_4 = 2\nu_2,$$

то, учитывая выражения (4.15), получим

$$\dot{V} = \nu_1 (u_1^2 + v_1^2) + \nu_2 (u_2^2 + v_2^2) + \lambda_5 z_5^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + Z. \quad (4.16)$$

¹⁾ Если все корни комплексно-сопряженные, то

$$V = \frac{1}{2} (z_1 z_2 + z_3 z_4 + \dots + z_{n-1} z_n),$$

если все корни вещественные, то

$$V = \frac{1}{2} (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2).$$

По условию теоремы вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны. В принятых обозначениях будем иметь

$$v_1 < 0, v_2 < 0, \lambda_5 < 0, \dots, \lambda_n < 0.$$

Из этого следует, что квадратичная часть производной \dot{V} будет определенно-отрицательной функцией переменных $u_1, v_1, u_2, v_2, z_5, \dots, z_n$, а вместе с ней при достаточно малых значениях $|z_k|$ определенно-отрицательной будет и производная \dot{V} независимо от членов высшего порядка. Таким образом, выполнены все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (§ 2.3), что доказывает сформулированную теорему.

Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению. Если среди корней характеристического уравнения найдется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво независимо от членов выше первого порядка малости.

Доказательство. По условию теоремы хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть. Пусть это будет λ_1 , т. е. $v_1 = \operatorname{Re} \lambda_1 > 0$.

Для упрощения доказательства сделаем следующие предположения:

- 1) вещественные части всех корней не равны нулю;
- 2) корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — простые (доказательство теоремы, свободное от этих ограничений, можно найти, например, в книгах А. М. Ляпунова, Н. Г. Четаева, И. Г. Малкина [35, 49, 37]).

Для определенности будем по-прежнему считать, что имеются две пары комплексно-сопряженных корней ($\lambda_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \lambda_3, \lambda_4 = \bar{\lambda}_3$), а остальные корни $\lambda_5, \dots, \lambda_n$ вещественные. Составим функцию Ляпунова в следующей форме:

$$V = \frac{1}{2} v_1 (z_1 z_2 + v_2 z_3 z_4 + \lambda_5 z_5^2 + \dots + \lambda_n z_n^2). \quad (4.17)$$

Отметим, что эта вещественная функция может принимать положительные значения, например, при $z_3 = z_4 = z_5 = \dots = z_n = 0$ и $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$. Вычислим производную \dot{V} функции V :

$$\dot{V} = v_1 \left\{ \frac{1}{2} [\dot{z}_1 z_2 + z_1 \dot{z}_2 + v_2 (\dot{z}_3 z_4 + z_3 \dot{z}_4)] + \right. \\ \left. + \lambda_5 z_5 \dot{z}_5 + \dots + \lambda_n z_n \dot{z}_n \right\}.$$

Внесем сюда значения производных \dot{z}_k из уравнений (4.8) и сгруппируем члены, как это было сделано при доказательстве первой теоремы:

$$\dot{V} = v_1 \left\{ \frac{1}{2} [(\lambda_1 + \lambda_2) z_1 z_2 + v_2 (\lambda_3 + \lambda_4) z_3 z_4] + \lambda_5^2 z_5^2 + \dots + \lambda_n^2 z_n^2 \right\} + Z,$$

где Z — совокупность членов, содержащих z_1, \dots, z_n в степени выше второй. Пользуясь равенствами (4.12) и (4.15), получим

$$\dot{V} = v_1 \{ v_1 (u_1^2 + v_1^2) + v_2^2 (u_2^2 + v_2^2) + \lambda_5^2 z_5^2 + \dots + \lambda_n^2 z_n^2 \} + Z. \quad (4.18)$$

В сделанных предположениях $v_1 > 0$ и $v_2, \lambda_5, \dots, \lambda_n$ не равны нулю. Поэтому квадратичная часть производной \dot{V} будет определенно-положительной, а вместе с ней при достаточно малых значениях $|z_k|$ определенно-положительной будет и производная \dot{V} независимо от членов высшего порядка. Таким образом, выполнены все условия теоремы Ляпунова о неустойчивости движения (см. § 2.4) (функция V может принимать положительные значения, а ее производная \dot{V} , вычисленная в силу уравнений возмущенного движения, определенно-положительная), что доказывает сформулированную теорему.

Доказанные две теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению решают задачу в двух случаях:

- 1) вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны;
- 2) вещественная часть хотя бы одного корня положительна.

В обоих случаях уравнения первого приближения полностью решают задачу об устойчивости движения без необходимости привлечения к анализу нелинейных членов. Конечно, структура корней характеристического уравнения может быть и другой, а именно: вещественные части некоторых или всех корней характеристического уравнения могут равняться нулю (в частности, среди корней могут быть и нулевые), а вещественные части остальных корней отрицательны. В этих случаях (они называются *особыми* или *критическими* случаями) для определения характера устойчивости движения одних уравнений первого приближения недостаточно — необходимо рассмотреть влияние нелинейных членов.

Исследование особых случаев требует, как правило, применения весьма тонких методов анализа, а также больших и трудоемких преобразований. Учитывая характер настоящего руководства, мы ограничимся разбором двух примеров, показывающих, что в особых случаях уравнения первого приближения не могут решить задачу об устойчивости движения (подробный разбор особых случаев см. в книгах А. М. Ляпунова, Н. Г. Четаева, И. Г. Малкина, А. П. Маркеева [35, 49, 37, 37а]).

Пример 1. Рассмотрим уравнения возмущенного движения, которые были приведены на с. 20:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha x_2 + \alpha x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 + \alpha x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\end{aligned}$$

где $\alpha = \text{const.}$

Составим уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha x_2, \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1.\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda & \alpha \\ -\alpha & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \alpha^2 = 0$$

имеет два корня ($\lambda_{1,2} = \pm |\alpha| i$), вещественные части которых равны нулю ($\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 = 0$). Следовательно, для рассматриваемых уравнений теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению неприменимы. В § 1.2 было показано, что решение полных уравнений ничего общего не имеет с решением уравнений первого приближения (см. с. 21).

Пример 2. Рассмотрим устойчивость равновесия системы с одной степенью свободы, находящейся под действием нелинейной потенциальной силы и силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости (см. пример 4 § 2.7). Уравнения возмущенного движения в сделанных предположениях имеют вид (см. (2.63))

$$\begin{aligned}M\dot{x}_1 &= -\mu x_1 - \nu x_2^m, \\ \dot{x}_2 &= x_1 \quad (m \geq 2, \mu > 0).\end{aligned}$$

Составим уравнения первого приближения

$$\begin{aligned}M\dot{x}_1 &= -\mu x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1.\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} M\lambda + \mu & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(M\lambda + \mu) = 0$$

имеет один отрицательный вещественный корень ($\lambda_1 = -\mu/M$) и один нулевой корень ($\lambda_2 = 0$). Согласно теореме 3, приведенной

на с. 100, невозмущенное движение $x_1 = x_2 = 0$, соответствующее уравнениям первого приближения, устойчиво, но не асимптотически. Так как один корень характеристического уравнения равен нулю ($\lambda_2 = 0$), то этот вывод может оказаться ошибочным. Действительно, анализ нелинейных уравнений (см. пример 4 § 2.7) показывает, что при $\kappa > 0$ и m нечетном движение асимптотически устойчиво в целом, а во всех остальных случаях движение неустойчиво.

§ 4.4. Критерий Гурвица

Раскроем характеристический определитель, сгруппируем члены по степеням λ и приведем уравнение (4.5) к виду

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (4.19)$$

причем, не нарушая общности, можно считать, что $a_0 > 0$ ¹⁾.

Согласно первой теореме § 4.3, для определения устойчивости движения по уравнениям первого приближения нужно знать, когда вещественные части всех корней характеристического уравнения будут отрицательны. Естественно, что наибольший интерес представляет решение этой задачи, не связанное с непосредственным вычислением корней характеристического уравнения.

Впервые эту задачу в 1868 г. поставил Д. Максвелл; он же привел решение для $n = 3$. В общем виде в 1877 г. решил эту задачу Е. Раус [56]. Его решение носит алгоритмический характер; в явном виде он дал условия для $n = 4$ и $n = 5$. В 1895 г. А. Гурвиц получил аналитическое решение. Алгоритм Рауса и критерий Гурвица эквивалентны, хотя они и различны по форме. Полезно отметить, что работы Максвелла были связаны с его исследованиями регуляторов, а математик Гурвиц занялся этой проблемой по просьбе проф. А. Стодолы, инженера-машиностроителя, одного из основоположников теории регулирования турбин. Работы Д. Максвелла и А. Стодолы приведены в [13]. Мы рассмотрим условие Гурвица — оно носит алгебраический характер, более удобно в приложениях и имеет наибольшее распространение.

¹⁾ Если уравнения первого приближения решены относительно производных \dot{x}_k , то коэффициент a_0 при старшем члене в уравнении (4.19) равен $(-1)^n$; при n нечетном умножением всего уравнения на -1 его можно сделать равным $+1$. В общем случае $a_0 \neq 1$, и делить на этот коэффициент не всегда рационально.

Построим из коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n уравнения (4.19) следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Эта матрица строится следующим образом: в первой строке стоят коэффициенты уравнения (4.19) с нечетными индексами, начиная с a_1 . Элементы каждой последующей строки образуются из соответствующих элементов предшествующей строки уменьшением индекса на единицу. Если в соответствии с этим правилом индекс коэффициента a_k , т. е. число k , превосходит степень n уравнения (4.19) или должен быть отрицательным, то a_k заменяется нулем. В результате такого построения на главной диагонали должны стоять коэффициенты a_1, \dots, a_n , а в последнем столбце все элементы, кроме последнего, равны нулю.

Составим из матрицы (4.20) главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \quad (4.21)$$

Последнее равенство очевидно, если учесть, что в последнем столбце матрицы (4.20) все элементы, кроме a_n , равны нулю.

Теорема Гурвица. *Для того чтобы все корни алгебраического уравнения (4.19) с вещественными коэффициентами и положительным коэффициентом при старшем члене имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры (4.21) были положительны:*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n > 0. \quad (4.22)$$

Не останавливаясь на доказательстве этой чисто алгебраической теоремы (см., например, [49]), заметим, что из теоремы Гурвица и первой теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению можно сделать следующий вывод: *если при $a_0 > 0$ все миноры Гурвица $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ положительны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, независимо от членов выше первого порядка малости.*

Заметим также, что если хотя бы одно из неравенств (4.22) имеет противоположный смысл, то среди корней

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ уравнения (4.19) имеются такие, вещественные части которых положительны (это служит признаком неустойчивости системы — вторая теорема Ляпунова, § 4.3).

Прежде чем перейти к рассмотрению частных случаев, остановимся на следствиях, вытекающих непосредственно из формул Виета:

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{a_0} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n), \\ \frac{a_2}{a_0} &= \lambda_1\lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{a_n}{a_0} &= (-1)^n \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n.\end{aligned}\quad (4.23)$$

1. Для того чтобы при $a_0 > 0$ все корни уравнения (4.19) имели отрицательные вещественные части, необходимо, чтобы все коэффициенты a_1, \dots, a_n были положительны

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0. \quad (4.24)$$

Заметим, что эти неравенства (копечно, они только необходимы, но не достаточны) можно получить из критерия Гурвица.

2. Если при $a_0 > 0$ хотя бы один из коэффициентов a_1, \dots, a_n отрицателен, то среди корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ уравнения (4.19) имеются такие, вещественные части которых положительны.

Перейдем к рассмотрению частных случаев.

1. Система первого порядка ($n = 1$). Характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0\lambda + a_1 = 0. \quad (4.25)$$

Условие асимптотической устойчивости ($a_0 > 0$)

$$a_1 > 0. \quad (4.26)$$

2. Система второго порядка ($n = 2$):

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \quad (4.27)$$

Матрица (4.20) и условие Гурвица имеют вид

$$\left\| \begin{array}{cc} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{array} \right\|, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1a_2 > 0.$$

Отсюда следует условие асимптотической устойчивости системы второго порядка ($a_0 > 0$)

$$a_1 > 0, a_2 > 0 \quad (4.28)$$

3. Система третьего порядка ($n = 3$):

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (4.29)$$

Составим матрицу (4.20) и условие Гурвица:

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{array} \right\|, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0, \\ \Delta_3 = a_3\Delta_2 > 0.$$

Пользуясь неравенствами (4.24), сразу получаем условие асимптотической устойчивости системы третьего порядка ($a_0 > 0$):

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0. \quad (4.30)$$

4. Система четвертого порядка ($n = 4$). В этом случае

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0. \quad (4.31)$$

Составим матрицу (4.20) и условие Гурвица (4.22):

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{array} \right\|, \\ \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0, \\ \Delta_3 = a_3\Delta_2 - a_1^2a_4 > 0, \quad \Delta_4 = a_4\Delta_3 > 0.$$

При выполнении неравенств (4.24) условие $\Delta_2 > 0$ становится следствием условия $\Delta_3 > 0$. Поэтому условие асимптотической устойчивости системы четвертого порядка имеет вид ($a_0 > 0$)

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \\ \Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 > 0 \quad (4.32)$$

(в Δ_3 внесено значение Δ_2).

Приведем пример, показывающий, что при $n > 2$ выполнение одних неравенств (4.24) недостаточно для отрицательности вещественных частей всех корней характеристического уравнения. Рассмотрим уравнение третьей степени

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 30 = 0.$$

Все его коэффициенты положительны, так что условие (4.24) выполнено. Однако два корня этого уравнения,

$$\lambda_1 = 1 + 3i, \quad \lambda_2 = 1 - 3i,$$

имеют положительные вещественные части ($\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 1$), а корень $\lambda_3 = -3$ отрицателен. Заметим, что последнее неравенство из (4.30) имеет в этом случае противоположный знак:

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 30 = -26 < 0.$$

В заключение этого параграфа заметим, что в общем виде условие Гурвица очень удобно при $n \leq 4$. В тех случаях, когда n велико и левая часть характеристического уравнения имеет форму определителя и не приведена к многочлену (раскрытие определителя большого порядка представляет трудоемкую задачу), целесообразно перейти к численным методам с использованием электронных вычислительных машин. Численные методы с применением ЭВМ полезны и в тех случаях, когда характеристическое уравнение задано в форме многочлена.

§ 4.5. Примеры

Пример 1. Условия устойчивости установившихся режимов вольтовой дуги в цепи с сопротивлением, самоиндукцией и зашунтированной емкостью. В примере 2 § 2.7 были рассмотрены условия устойчивости установившихся режимов вольтовой дуги в цепи с сопротивлением и самоиндукцией. Рассмотрим усложненную схему [4], когда в цепь дополнительно включена зашунтированная емкость (рис. 4.1). Предполагаем, как и раньше, что ток, проходящий через дугувой промежуток, является функцией напряжения на дуге, т. е. снова будем пренебрегать инерцией ионных процессов в дуге. Пользуясь законами Кирхгофа, легко получим следующие дифференциальные уравнения процессов, протекающих в схеме:

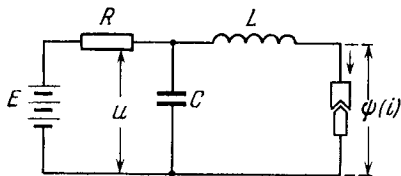


Рис. 4.1

В этих уравнениях L — самоиндукция, C — емкость конденсатора, R — омическое сопротивление, E — электродвижущая сила источника постоянного тока, $\psi(i) = v$ — напряжение на дуге (график этой функции изображен на рис. 2.18).

$$L \frac{di}{dt} = u - \psi(i), \quad C \frac{du}{dt} = \frac{E - u}{R} - i. \quad (4.33)$$

Внося в уравнения $i = I = \text{const}$ и $u = U = \text{const}$, получим уравнения для определения тока I и напряжения U , отвечающих установившимся режимам:

$$U - \psi(I) = 0, \quad E - U - RI = 0, \quad (4.34)$$

или, исключая напряжение U ,

$$RI + \psi(I) = E. \quad (4.35)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (2.49), которое соответствует схеме без емкости. Из этого следует, что внесение емкости в схему вольтовой дуги не изменяет значения тока в возможных установившихся режимах. При анализе уравнения (2.49) было показано, что таких режимов принципиально может существовать три, два, один; при отсутствии вещественных корней уравнения (2.49) или, что то же самое, (4.35), установившихся режимов не существует. В том же примере были установлены условия асимптотической устойчивости установившихся режимов. Рассмотрим, какие изменения внесет зашунтированная емкость в полученные результаты.

Примем установившийся режим за невозмущенное движение. Обозначим значение тока i в возмущенном движении через $I + x$, а значение напряжения u в этом движении через $U + y$:

$$i = I + x, \quad u = U + y.$$

Внесем эти выражения в уравнения (4.33):

$$\begin{aligned} L \frac{dx}{dt} &= U + y - \psi(I + x), \\ C \frac{dy}{dt} &= \frac{E - U - y}{R} - I - x. \end{aligned}$$

Разложим функцию $\psi(I + x)$ в ряд по степеням x и воспользуемся введенным ранее обозначением $\kappa = \psi'(I)$.

$$\psi(I + x) = \psi(I) + \kappa x + \dots,$$

где точками обозначены члены высшего порядка. Подставив это выражение для функции $\psi(I + x)$ в последние уравнения, получим

$$\begin{aligned} L \frac{dx}{dt} &= y - \kappa x + U - \psi(I) + \dots, \\ C \frac{dy}{dt} &= -\frac{y}{R} - x + \frac{E - U}{R} - I. \end{aligned}$$

Учитывая, что значения тока I и напряжения U в установившемся режиме должны удовлетворять равенствам (4.34), найдем дифференциальные уравнения первого приближения возмущенного движения:

$$L \frac{dx}{dt} = y - \kappa x, \quad C \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{R} - x. \quad (4.36)$$

Будем искать решение в форме (4.3):

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}. \quad (4.37)$$

Продифференцируем эти выражения по времени, внесем найденные значения для производных и сами функции в уравнения (4.36) и сократим их на $e^{\lambda t}$. Тогда после очевидных преобразований получим

$$(L\lambda + \kappa)A - B = 0, \quad A + \left(C\lambda + \frac{1}{R}\right)B = 0. \quad (4.38)$$

Приравняв нулю определитель этой системы, получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} L\lambda + \kappa & -1 \\ 1 & C\lambda + \frac{1}{R} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$CL\lambda^2 + \left(\frac{L}{R} + \kappa C\right)\lambda + \frac{\kappa}{R} + 1 = 0. \quad (4.39)$$

Согласно критерию Гурвица (4.28), для системы второго порядка (4.27) установившееся движение $i = I$, $u = U$ будет асимптотически устойчиво, если коэффициенты a_1 и a_2 этого уравнения положительны. В рассматриваемом случае будем иметь следующие условия асимптотической устойчивости установившегося режима от носительно тока i и напряжения u :

$$\frac{L}{R} + \kappa C > 0, \quad \frac{\kappa}{R} + 1 > 0. \quad (4.40)$$

В этих неравенствах L , R и C — положительные параметры системы, а число $\kappa = \psi'(I)$ — угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $v = \psi(i)$ в точках $i = I$ (крутизна характеристики напряжения). Если $\kappa \geq 0$, то оба неравенства (4.40) будут выполнены и, следовательно, соответствующий установившийся режим асимптотически устойчив. Если же $\kappa < 0$, то установившийся режим вольтовой дуги будет асимптотически устойчив для тех значений κ , которые удовлетворяют условиям (4.40), или

$$\kappa > -\frac{L}{CR}, \quad \kappa > -R.$$

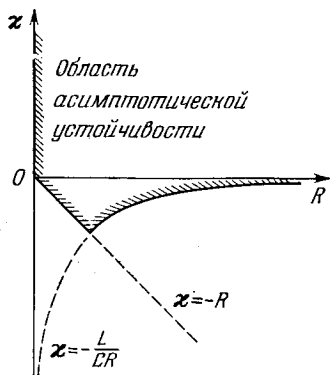


Рис. 4.2

Если хотя бы одно из неравенств будет иметь противоположный смысл, то соответствующий установившийся режим будет неустойчив. Поэтому на плоскости R, κ границей области асимптотической устойчивости будет прямая $R = 0$, гипербола $CR\kappa = -L$ и прямая $\kappa = -R$ (рис. 4.2). Вне этой области установившиеся режимы неустойчивы. Сравнивая рис. 2.20 и 4.2, видим, что введение емкости уменьшает область

устойчивости установившихся режимов вольтовой дуги. Это не означает, конечно, что введение емкости нерационально для рассматриваемой схемы, так как при этом можно получить качественно другие переходные процессы.

Пример 2. Условие устойчивости лампового генератора. В примере 3 § 2.7 были получены следующие нелинейные дифференциальные уравнения возмущенного

движения лампового генератора (см. рис. 2.23 и уравнения (2.53)):

$$C \frac{du}{dt} = -i, \quad L \frac{di}{dt} = u - \frac{1}{C} [RC - MS(u)] i. \quad (4.41)$$

Условие асимптотической устойчивости (2.59) было установлено непосредственным применением прямого метода Ляпунова. В этом примере условие (2.59) будет получено с помощью теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Воспользуемся разложением (2.57) функции $S(u)$ в ряд по степеням u :

$$S(u) = S_0 + S'(0)u + \dots,$$

и внесем это выражение для $S(u)$ во второе уравнение (4.41). Ограничиваясь линейными членами, получим дифференциальные уравнения первого приближения

$$C \frac{du}{dt} = -i, \quad L \frac{di}{dt} = u - \frac{1}{C} (RC - MS_0) i.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} C\lambda & 1 \\ -1 & L\lambda + \frac{RC - MS_0}{C} \end{vmatrix} = 0$$

легко приводится к виду

$$CL\lambda^2 + (RC - MS_0)\lambda + 1 = 0.$$

Критерий Гурвица (4.28) сводится к одному неравенству (2.59)

$$RC - MS_0 > 0,$$

при выполнении которого равновесное состояние лампового генератора будет асимптотически устойчиво относительно тока i и напряжения u . Если это неравенство будет иметь противоположный смысл, то равновесное состояние лампового генератора неустойчиво.

При $RC - MS_0 = 0$ корни характеристического уравнения чисто мнимые и уравнения первого приближения не могут дать обоснованного ответа на вопрос об устойчивости движения.

Сравнивая приведенное здесь решение с решением этой задачи в § 2.7, видим, что применение теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению может существенно упростить исследование.

Пример 3. Условие устойчивости установлено в вышеописанном режиме двигателя с центробежным регулятором. Центробежный регулятор скорости вращения двигателя¹⁾, изображенный на рис. 4.3, воздействует непосредственно на регулирующий орган (дрессельную заслонку, регулирующую подачу горючего или пара), поэтому он относится к классу регуляторов прямого действия.

Проблемы, возникшие в середине XIX столетия в связи с применением регуляторов этого типа к двигателям большой мощности,

¹⁾ Центробежный регулятор скорости вращения паровой машины изобретен Уаттом в 1784 г.

впервые обратили серьезное внимание инженеров и ученых на значение теории устойчивости движения для техники.

Прежде всего приведем распространенное в свое время объяснение принципа действия регулятора, изображенного на рис. 4.3. В установившемся режиме угловая скорость ω вращения вала регулятора (она отличается от угловой скорости вращения маховика двигателя на передаточное число) сохраняет постоянное значение ω_0 ; кроме того, в установившемся режиме стержни, удерживающие шары, составляют постоянный угол α с осью вращения регулятора.

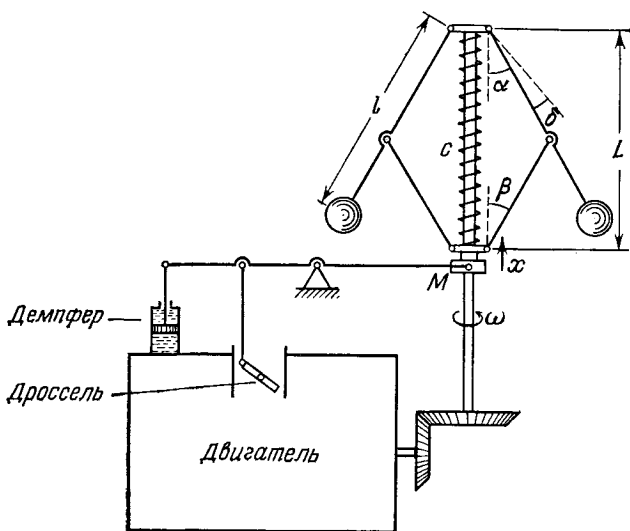


Рис. 4.3

Муфта M регулятора и дроссельная заслонка неподвижны и занимают вполне определенное положение, соответствующее заданной угловой скорости ω_0 .

Предположим, что установившийся режим нарушен, например по каким-либо причинам немного увеличилась угловая скорость маховика двигателя. В этом случае шары под действием увеличенных центробежных сил разойдутся на больший угол, муфта M поднимется и через систему рычагов опустит дроссельную заслонку, уменьшив тем самым подачу топлива или пара. Это приведет к уменьшению угловой скорости, и вся система вернется в установившееся состояние, соответствующее заданной угловой скорости ω_0 .

В этом распространенном ранее описании принципа действия центробежного регулятора не учитывались инерционность двигателя и силы сопротивления. Более того, предполагалось, что силы сопротивления могут иметь только отрицательное значение; поэтому инженеры и механики, занятые изготовлением центробежных регуляторов, принимали все доступные в те времена меры для уменьшения сил сопротивления. Заметим, что изображенный на рис. 4.3

демпфер¹⁾ появился только во второй половине XIX столетия, когда десятки тысяч центробежных регуляторов уже использовались в промышленности.

При переходе к двигателям большей мощности обнаружилось, что регуляторы, изготовленные по этому принципу, не только не обеспечивают устойчивый режим работы, но даже разгоняют двигатели. Для того чтобы уяснить причины этого явления, составим дифференциальные уравнения возмущенного движения и определим условия устойчивости установившегося режима.

Для простоты выкладок пренебрежем массой муфты и стержней; кроме того, будем считать шары за материальные точки и предположим, что в установившемся режиме пружина с жесткостью c находится в недеформированном состоянии. Углы α , β и расстояние L муфты M от верхних шарниров, показанные на рис. 4.3, соответствуют установившемуся режиму. Пусть установившийся режим нарушен: муфта M поднялась на величину x , а угол α изменился на δ .

Имея в виду составить уравнения первого приближения, будем считать величины x и δ малыми. Тогда с точностью до членов высшего порядка получим

$$\delta = \mu x, \quad (4.42)$$

где $\mu = \frac{c \operatorname{ctg} \beta}{L}$ (читатель легко установит эту зависимость самостоятельно).

Обозначим угловую скорость вращения регулятора в неустановившемся режиме через $\dot{\psi}$, а угол между стержнями шаров и осью регулятора через $\varphi = \alpha + \delta$. Так как движение шаров складывается из переносного движения (вращение вокруг оси регулятора) и относительного движения (вращение вокруг верхних шарниров на угол φ), то кинетическая энергия системы будет равна

$$T = ml^2 (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} J \dot{\psi}^2.$$

Здесь m — масса одного шара, а J — приведенный к оси вала двигателя момент инерции его вращающихся частей с учетом передаточного числа (предполагается, что $J = \text{const}$).

Потенциальная энергия силы тяжести шаров и пружины определяется равенством

$$\Pi = 2ml (\cos \alpha - \cos \varphi) + \frac{1}{2} \frac{c}{\mu^2} (\varphi - \alpha)^2$$

(в сделанных предположениях деформация пружины равна $x = \delta/\mu$).

Обобщенные силы системы равны

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = v\dot{\varphi}, \quad Q_\psi = M_1 - M_2,$$

где $-v\dot{\varphi}$ — приведенная к стержням шаров сила жидкостного сопротивления ($v = \text{const}$), создаваемая демпфером или естественными силами сопротивления, M_1 — движущий момент, M_2 — момент

¹⁾ Гидравлический демпфер (катаракт) состоит из поршня и цилиндра, заполненного вязкой жидкостью. При перемещении поршня жидкость протекает через небольшие отверстия (они делаются в поршне или в обводном канале), создавая силы сопротивления, пропорциональные первой степени скорости.

сопротивления двигателя, приведенный к его оси. Можно считать, что движущий момент M_1 зависит от поступающего рабочего тела, т. е. от положения дросселя, угол поворота которого есть функция φ , а момент сопротивления M_2 зависит от угловой скорости вращения вала $\dot{\psi}$.

Применяя обычную схему Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q \quad (q = \varphi, \psi),$$

составим уравнения движения системы

$$2ml^2\ddot{\varphi} - ml^2\dot{\psi}^2 \sin 2\varphi = -2mgl \sin \varphi - \frac{c}{\mu^2} (\varphi - \alpha) - \nu\dot{\varphi}, \quad (4.43)$$

$$(J + 2ml^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\psi} + 2ml^2 \sin 2\varphi \dot{\varphi} \dot{\psi} = M_1(\varphi) - M_2(\dot{\psi}).$$

В установившемся движении $\varphi = \alpha = \text{const}$, $\dot{\psi} = \omega = \text{const}$. Внося эти значения в уравнения (4.43), найдем связь между параметрами системы

$$\omega^2 \cos \alpha = g/l, \quad M_1(\alpha) = M_2(\omega). \quad (4.44)$$

Положим $\dot{\psi} = \omega + z$ и $\varphi = \alpha + \mu x$. Подставив эти значения для $\dot{\psi}$ и φ в (4.43), получим уравнения возмущенного движения

$$2m\mu l^2 \ddot{x} - ml^2 (\omega + z)^2 \sin 2(\alpha + \mu x) =$$

$$= -2mgl \sin(\alpha + \mu x) - \frac{c}{\mu} x - \nu \dot{x},$$

$$[J + 2ml^2 \sin^2(\alpha + \mu x)] \dot{z} + 2\mu ml^2 \sin 2(\alpha + \mu x) \dot{x} (\omega + z) =$$

$$= M_1(\alpha + \mu x) - M_2(\omega + z).$$

Разложим нелинейные члены в ряды по степеням x и z . Тогда, ограничиваясь членами первой степени относительно x и z и учитывая равенства (4.44), получим уравнения первого приближения возмущенного движения системы около установившегося движения $\varphi = \alpha$ и $\dot{\psi} = \omega$:

$$2\mu^2 ml^2 \ddot{x} + 2\nu \dot{x} + (c + 2\mu^2 ml^2 \omega^2 \sin^2 \alpha) x = 2\mu ml^2 \omega \sin 2\alpha \cdot z,$$

$$(J + 2ml^2 \sin^2 \alpha) \dot{z} + 2\mu ml^2 \omega \sin 2\alpha \cdot \dot{x} =$$

$$= \mu \left(\frac{\partial M_1}{\partial x} \right)_{x=0} x - \left(\frac{\partial M_2}{\partial z} \right)_{z=0} z.$$

Для простоты обозначений введем постоянные времени T_1 , T_2 , T_0 и коэффициенты усиления k_0 , k_1 и k_2 :

$$T_1^2 = \frac{2\mu^2 ml^2}{c + 2\mu^2 ml^2 \omega^2 \sin^2 \alpha}, \quad T_2 = \frac{\mu^2 \nu}{c + 2\mu^2 ml^2 \omega^2 \sin^2 \alpha},$$

$$T_0 = (J + 2ml^2 \sin^2 \alpha) \left[\left(\frac{\partial M_2}{\partial z} \right)_0 \right]^{-1}, \quad k_2 = 2\mu ml^2 \omega \sin 2\alpha \left[\left(\frac{\partial M_2}{\partial z} \right)_0 \right]^{-1},$$

$$k_1 = \frac{2\mu ml^2 \omega \sin 2\alpha}{c + 2\mu^2 ml^2 \omega^2 \sin^2 \alpha}, \quad k_0 = -\mu \left(\frac{\partial M_1}{\partial x} \right)_0 \left[\left(\frac{\partial M_2}{\partial z} \right)_0 \right]^{-1}.$$

Теперь уравнения возмущенного движения примут свой окончательный вид

$$T_1^2 \ddot{x} + T_2 \dot{x} + x = k_1 z, \quad T_0 \dot{z} + z = -k_0 x - k_2 \dot{x}. \quad (4.45)$$

Здесь необходимо отметить, что производная $(\partial M_2 / \partial z)_0$ положительна (момент сопротивления M_2 возрастает с увеличением угловой скорости $\dot{\psi}$, т. е. z), а производная $(\partial M_1 / \partial x)_0$ отрицательна, так как из самого устройства регулятора видно, что с увеличением подъема муфты M (возрастания x) дроссельная заслонка будет пропускать меньше рабочего тела (см. рис. 4.3). Из этого следует, что коэффициент усиления k_0 положителен.

Будем искать решение уравнений (4.45) в форме

$$x = A e^{\lambda t}, \quad z = B e^{\lambda t}.$$

Найдем отсюда \dot{x} , \ddot{x} , \dot{z} и внесем соответствующие значения в уравнения (4.45). Произведя очевидные преобразования, получим обычным путем следующие алгебраические уравнения:

$$\begin{aligned} (T_1^2 \lambda^3 + T_2 \lambda + 1) A - k_1 B &= 0, \\ (k_2 \lambda + k_0) A + (T_0 \lambda + 1) B &= 0. \end{aligned}$$

Так как эта система однородных уравнений должна иметь решение относительно A и B , отличное от нуля, то определитель этой системы равняется нулю:

$$\begin{vmatrix} T_1^2 \lambda^3 + T_2 \lambda + 1 & -k_1 \\ k_2 \lambda + k_0 & T_0 \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$T_0 T_1^2 \lambda^3 + (T_1^3 + T_0 T_2) \lambda^2 + (T_0 + T_2 + k_1 k_2) \lambda + 1 + k_0 k_1 = 0.$$

Для большей наглядности учтем, что члены T_2 и $k_1 k_2$ существенно меньше T_0 . На этом основании последнее уравнение можно записать так:

$$T_0 T_1^2 \lambda^3 + (T_1^3 + T_0 T_2) \lambda^2 + T_0 \lambda + 1 + k_0 k_1 = 0.$$

Все коэффициенты этого уравнения положительны, поэтому критерий Гурвица (4.30) приводится к одному неравенству

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

что в нашем случае дает

$$\Delta_2 = T_0 (T_0 T_2 - k_0 k_1 T_1^3) > 0. \quad (4.46)$$

Таково условие асимптотической устойчивости системы двигателя — центробежный регулятор. Все постоянные времени T_0 , T_1 , T_2 и коэффициенты усиления k_0 и k_1 легко вычисляются по параметрам системы, и, для того чтобы успешно осуществлялось регулирование, необходимо прежде всего подчинить их неравенству (4.46).

Отметим теперь, что при отсутствии сил сопротивления в регуляторе постоянная времени T_2 равна нулю и неравенство (4.46) принимает противоположный смысл:

$$\Delta_2 = -k_0 k_1 T_0 T_1^3 < 0.$$

Это означает, что без сил сопротивления регулирование неосуществимо, так как система неустойчива.

Возникает, естественно, вопрос: почему десятки тысяч центробежных регуляторов, изготовленных до середины XIX столетия, успешно работали? Объясняется это следующим. Маломощные двигатели имели большие маховики и легкие регулирующие устройства, перемещавшиеся с существенным трением, обусловленным грубым выполнением. В этих условиях постоянная $T_2 \neq 0$, а постоянная T_0 очень велика (за счет больших моментов инерции J маховиков). В результате неравенство (4.46) выполнялось автоматически без заботы об этом конструкторов. При увеличении мощности двигателя увеличилось число его оборотов и уменьшился момент инерции J маховика (при большом числе оборотов большие маховики не выдержат внутренних напряжений). Это привело к уменьшению постоянной T_0 , в результате чего естественных сил сопротивления, характеризующихся постоянной T_2 , оказалось недостаточно для выполнения условия устойчивости (4.46). Необходимо было увеличить силы жидкостного сопротивления, что и было сделано установкой демпфера. Его основная характеристика — постоянная времени T_2 , лежащая в основе расчетов, — легко определяется при заданных T_0 , T_1 , k_0 и k_1 из неравенства (4.46). Эти обстоятельства были впервые установлены И. А. Вышнеградским в работе [13], опубликованной в 1876 г. ¹⁾

Пример 4. Необходимое условие устойчивости волчка (вращательного движения снаряда). В примере 3 § 2.6 было получено достаточное условие устойчивости установившегося движения волчка (вращательного движения снаряда) относительно переменных α , $\dot{\alpha}$, β , $\dot{\beta}$ и $\dot{\psi}$:

$$J_z^2 n^2 > 4J_x Pl. \quad (4.47)$$

Покажем теперь, что при противоположном смысле этого неравенства установившееся движение волчка (вращательное движение снаряда) будет неустойчиво.

Составим дифференциальные уравнения возмущенного движения. Выражения для кинетической T и потенциальной Π энергий волчка были получены в примере 3 § 2.6:

$$T = \frac{1}{2} J_x (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} J_z (\dot{\psi} - \dot{\beta} \sin \alpha)^2,$$

$$\Pi = Pl \cos \alpha \cos \beta.$$

Так как для доказательства неустойчивости движения достаточно показать, что хотя бы одна траектория в возмущенном движении выходит за пределы сферы ε , то рассмотрим возмущения ($\alpha = \alpha_0$, $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$, $\beta = \beta_0$, $\dot{\beta} = \dot{\beta}_0$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = n$ при $t = 0$), для

¹⁾ В упомянутой статье И. А. Вышнеградского впервые дан подробный анализ работы регулятора прямого действия и сделаны практические выводы, оказавшие глубокое влияние на развитие теории и практики автоматического регулирования. Не без основания считается, что эта работа положила основание современной теории регулирования.

которых интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_z (\dot{\varphi} - \dot{\beta} \sin \alpha) = J_z n \quad (4.48)$$

сохраняет свое значение.

Чтобы составить уравнения первого приближения, разложим выражения для кинетической T и потенциальной Π энергий в ряд по степеням α , $\dot{\alpha}$, β и $\dot{\beta}$, сохраняя члены до второго порядка малости включительно. С точностью до постоянной будем иметь

$$T = \frac{1}{2} J_x (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} J_z (\dot{\varphi} - \dot{\beta} \alpha)^2,$$

$$\Pi = -\frac{1}{2} Pl (\alpha^2 + \beta^2).$$

Пользуясь уравнениями Лагранжа второго рода и интегралом (4.48), получим дифференциальные уравнения первого приближения возмущенного движения волчка относительно координат α , β и скоростей $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$

$$\begin{aligned} J_x \ddot{\alpha} + J_z n \dot{\beta} - Pl \alpha &= 0, \\ J_x \ddot{\beta} - J_z n \dot{\alpha} - Pl \beta &= 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Обычным путем составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} J_x \lambda^2 - Pl & J_z n \lambda \\ -J_z n \lambda & J_x \lambda^2 - Pl \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$J_x^2 \lambda^4 + (J_z^2 n^2 - 2J_x Pl) \lambda^2 + P^2 l^2 = 0. \quad (4.50)$$

Критерий Гурвица для этого характеристического уравнения применить нельзя, так как неравенства (4.32) не выполняются ($a_1 = 0$, $a_3 = 0$, $\Delta_3 = 0$) и ни одно из них не имеет противоположного смысла. Поэтому исследуем это уравнение обычными методами.

Каждому корню $\lambda = \nu + \mu i$ уравнения (4.50) отвечает корень $-\lambda = -\nu + \mu i$ (неизвестное число λ содержится только в четной степени). Поэтому если вещественная часть хотя бы одного корня не равна нулю ($\text{Re } \lambda = \nu \neq 0$), то обязательно будет корень, вещественная часть которого положительна. Согласно теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению (см. § 4.3), невозмущенное движение в этом случае будет неустойчиво. Из этого следует, что для устойчивости невозмущенного движения волчка необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения (4.50) были чисто мнимыми, т. е. имели вид $\lambda = \mu i$, а корни относительно λ^2 — вещественными отрицательными числами. Но для этого необходимо, чтобы дискриминант D уравнения (4.50) относительно λ^2 был положительным:

$$D = (J_z^2 n^2 - 2J_x Pl)^2 - 4J_x^2 P^2 l^2 = J_z^2 n^2 (J_z^2 n^2 - 4J_x Pl) > 0.$$

Отсюда видно, что при противоположном смысле неравенства (4.47) дискриминант D будет отрицателен и, следовательно, установившееся движение волчка (вращательное движение сваряда) делается неустойчивым.

Пример 5. Устойчивость стационарных движений оси вращающегося неуравновешенного ротора, установленного в нелинейных подшипниках. Ранее было показано (см. пример 4 § 3.5), что равновесное положение оси уравновешенного ротора устойчиво. Однако уравновешенный ротор ($e = 0$) следует рассматривать как случайное событие, вероятность которого практически равна нулю. В реальных условиях всегда имеется хотя бы небольшой эксцентриситет e , в результате чего в нелинейных, в частности шариковых, подшипниках возникают большие давления на опоры, приводящие иногда к разрушению последних. Для принятия соответствующих мер предосторожности необходимо, прежде всего, определить стационарные движения оси ротора и их устойчивость.

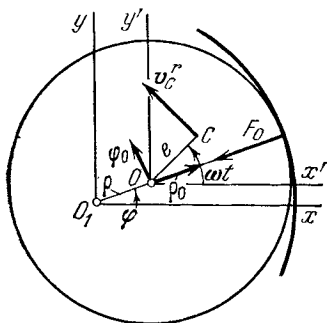


Рис. 4.4

Будем, как и в § 3.5, считать, что абсолютно твердый ротор массы m с вертикальной осью вращения установлен в жестко укрепленных на неподвижном основании упруго податливых подшипниках. Предполагается, что ротор, эксцентриситет которого $e = OC$, движется плоскопараллельно, а собственное вращение, происходящее вокруг оси O с постоянной частотой ω , осуществляется идеальным двигателем (двигателем неограниченной мощности). Нелинейные в общем случае реакции опор приводятся к равнодействующей $F_0(\rho)$, удовлетворяющей условиям (3.40). Положение оси ротора относительно неподвижной системы координат O_1xy будем определять полярными координатами ρ и φ (рис. 4.4). В сделанных предположениях относительно двигателя угол между отрезком OC и осью x' с точностью до начальной фазы равен ωt (ось x' перемещается поступательно, параллельно оси x). Проекции скорости v_O оси O ротора на полярные оси координат ρ_0 и φ_0 , как известно, определяются равенствами

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}. \quad (4.51)$$

Из рис. 4.4 видно, что проекции относительной скорости v_C^r центра масс C на те же оси будут равны

$$v_{C\rho}^r = -\omega e \sin(\omega t - \varphi), \quad v_{C\varphi}^r = \omega e \cos(\omega t - \varphi). \quad (4.52)$$

Кинетическую энергию найдем по формуле [12]

$$T = \frac{1}{2} m v_O^2 + m v_O \cdot v_C^r + T_O^r. \quad (4.53)$$

Здесь m — масса ротора, T_O^r — его кинетическая энергия относительно поступательно перемещающихся осей координат $Ox'y'$. Очевидно, что $T_O^r = J_O \omega^2 / 2$ и в сделанных предположениях $T_O^r = \text{const}$.

Скалярное произведение $\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{v}_C^r$ вычислим с помощью равенств (4.51) и (4.52):

$$\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{v}_C^r = \omega e [-\dot{\rho} \sin(\omega t - \varphi) + \rho \dot{\varphi} \cos(\omega t - \varphi)].$$

Пользуясь теперь равенством (4.53), найдем с точностью до постоянной кинетическую энергию ротора

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + m \omega e [-\dot{\rho} \sin(\omega t - \varphi) + \rho \dot{\varphi} \cos(\omega t - \varphi)]. \quad (4.54)$$

Учитывая силу сопротивления $F_C = \mu m \mathbf{v}_O$, пропорциональную первой степени скорости оси O ($\mu = \text{const}$) и пользуясь вторым методом Лагранжа, получим дифференциальные уравнения движения оси ротора (первое уравнение сокращено на m , второе — на $m\rho$)

$$\dot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 - \omega^2 e \cos(\omega t - \varphi) = -F(\rho) - \mu \dot{\rho}, \quad F(\rho) = F_0(\rho)/m, \quad (4.55)$$

$$\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} - \omega^2 e \sin(\omega t - \varphi) = -\mu \rho \dot{\varphi}.$$

В установившемся движении $\rho = r = \text{const}$, $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$, где постоянные r и $\gamma = \omega t - \varphi$ удовлетворяют равенствам

$$r\omega^2 + \omega^2 e \cos \gamma = F(r), \quad e\omega^2 \sin \gamma = \mu r \omega, \quad (4.56)$$

определяющим r и γ как функции ω .

Амплитудно-частотная характеристика представляет непрерывную линию, лежащую между двумя разомкнутыми ветвями, отвечающими случаю $\mu = 0$. Точки $A_{2,3}$ пересечения амплитудно-частотной характеристики (4.56) со скелетной кривой (рис. 4.5)

$$\omega = \kappa(r), \quad \kappa^2 = F(r)/r \quad (4.57)$$

определяются равенствами

$$\mu r = e \kappa(r), \quad \omega = \frac{\mu}{e} r, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}. \quad (4.58)$$

Так, для реакции $F_0 = a_0 \rho^\alpha$ будем иметь

$$r = \left(\frac{a_0}{m} \frac{e^2}{\mu^2} \right)^{1/(3-\alpha)}, \quad \omega = \frac{\mu}{e} \left(\frac{a_0}{m} \frac{e^2}{\mu^2} \right)^{1/(3-\alpha)}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Дифференцируя равенства (4.56) по ω и исключая затем $d\gamma/d\omega$, получим

$$\{[\kappa^2(r) - \omega^2] [F'(r) - \omega^2] + \mu^2 \omega^2\} \frac{dr}{d\omega} = \frac{\omega}{r} [2F(r) e \cos \gamma + \mu^2 r^2]. \quad (4.59)$$

Если коэффициент при $dr/d\omega$

$$a_4 = [\kappa^2(r) - \omega^2] [F'(r) - \omega^2] + \mu^2 \omega^2 \quad (4.60)$$

не имеет вещественных корней $r = r(\omega)$, то амплитудно-частотная характеристика не будет иметь касательных, параллельных оси r ; в противном случае такие касательные существуют. Для примера на рис. 4.5 показана амплитудно-частотная характеристика для реакции $F = a\rho^\alpha$ при $1 < \alpha < 2$. Характеристике 2 отвечает первый случай (отсутствие вещественных корней a_4), а характеристике 3 —

второй случай. Очевидно, что при небольших и очень больших ω , коэффициент a_4 положителен, а в точках B и C он равен нулю. Учитывая, что a_4 представляет непрерывную функцию ω , получим на участках OB и CD амплитудно-частотной характеристики $a_4 > 0$, а на участке BC этот коэффициент отрицателен.

Положив $\rho = r + z_1$ и $\varphi = \omega t - \gamma + z_2$ (z_k — вариации координат), получим из (4.55) уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 + \mu \dot{z}_1 - 2r\omega \dot{z}_2 + [F'(r) - \omega^2] z_1 - \mu r \omega z_2 &= Z_1, \\ r \dot{z}_2 + \mu r \dot{z}_2 + 2\omega \dot{z}_1 + \mu \omega z_1 + r[\chi^2(r) - \omega^2] z_2 &= Z_2. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Здесь Z_j — члены, содержащие z_k и \dot{z}_k в степени выше первой.

Характеристическое уравнение системы (4.61) приводится к виду

$$\begin{aligned} \lambda^4 + 2\mu\lambda^3 + [\chi^2(r) + F'(r) + \\ + 2\omega^2 + \mu^2] \lambda^2 + [\chi^2(r) + \\ + F'(r) + 2\omega^2] \lambda + [\chi^2(r) - \omega^2] \cdot \\ \cdot [F'(r) - \omega^2] + \mu^2 \omega^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

В силу условия (3.40) определитель Гурвица

$$\Delta_3 = \mu^2 [\chi^2(r) - F'(r)]^2 + 2[\chi^2(r) + F'(r)] (4\omega^2 + \mu^2), \quad (4.63)$$

и все коэффициенты уравнения (4.62), кроме последнего, всегда положительны, поэтому при $a_4 > 0$, где a_4 совпадает с (4.60), ста-

ционарное движение будет асимптотически устойчиво относительно $\rho, \dot{\rho}, \varphi$ и $\dot{\varphi}$, а при $a_4 < 0$ это движение неустойчиво, причем оба утверждения не зависят от членов высшего порядка. Уравнению

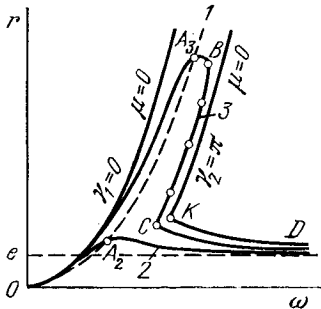


Рис. 4.5

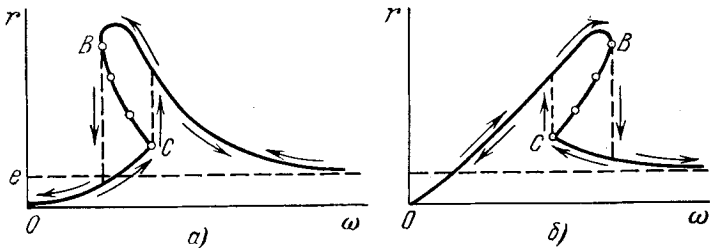


Рис. 4.6

$a_4 = 0$ отвечают точки бифуркации, в которых касательные к амплитудно-частотной характеристике параллельны оси r . Поэтому для реакции $F = ar^\alpha$ всей характеристике 2 и участкам OB и CD характеристики 3 (рис. 4.5) отвечают асимптотически устойчивые прецессии, а участку BC — неустойчивые прецессии. На рис. 4.6 показан характер изменения радиуса орбиты стационарного движения при медленном увеличении (уменьшении) частоты соответ-

ного вращения ротора для мягкой (a) и жесткой (b) упругой податливости подшипников.

Для нелинейной реакции $F_0(\rho)$ на восходящей ветви амплитудно-частотной характеристики давление N на подшипники может достигнуть значительной величины даже при ничтожно малом эксцентриситете. Действительно, при $F_0 = a_0 \rho^{3/2}$ (закон Герца, принятый для шариковых подшипников) уравнение скелетной кривой I (рис. 4.5) принимает вид $r = \omega^4/a^2 = m^2 \omega^4/a_0^2$. Так как на участке OA_3 радиус орбиты $r(\omega, e) > r(\omega, 0) = m^2 \omega^4/a_0^2$, то при любом $e \neq 0$ суммарное давление $N = a_0 r^{3/2}$ на подшипники будет удовлетворять условию

$$N > \frac{m^3}{a_0^2} \omega^6. \quad (4.64)$$

Отсюда видно, что при увеличении частоты ω собственного вращения ротора давление N на участке OA_3 быстро возрастает. Таким образом, анализ устойчивости объясняет возникновение больших давлений неуравновешенного ротора, установленного в нелинейных подшипниках¹⁾. Для борьбы с этим нежелательным явлением в некоторых случаях шариковые подшипники устанавливают в линейные упругие обоймы [26а].

¹⁾ Более подробный разбор устойчивости движения оси неуравновешенного ротора, в частности, с учетом ограниченной мощности двигателя содержится в [40а].

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

§ 5.1. Введение

В этой главе будет продолжено рассмотрение методов исследования устойчивости движения линейных автономных систем. В нормальной форме дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид (см. уравнения (1.14))

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где коэффициенты a_{kj} — постоянные вещественные числа.

Случай, когда характеристическое уравнение системы (5.1) имеет простые корни, был уже рассмотрен в § 4.2. В этой главе мы будем изучать устойчивость движения при любой структуре корней характеристического уравнения.

Решение вопроса об устойчивости систем, возмущенное движение которых описывается уравнениями (5.1), в общем случае требует знания некоторых разделов теории матриц. Кроме того, вся теория таких уравнений значительно проще и изящнее излагается в матричной форме. Поэтому эта глава начинается с изложения основных, а также некоторых специальных разделов теории матриц. Читатель, знакомый с элементами матричного исчисления, может опустить следующий параграф.

§ 5.2. Матрицы и основные действия с ними

а) Основные определения. *Всякая система из $n \cdot t$ чисел, расположенных в форме прямоугольной таблицы, содержащей n строк и t столбцов, называется матрицей типа $n \times t$. Числа, составляющие матрицу (т. е. таблицу), называются элементами матрицы; в общем виде их снабжают индексами внизу (первый индекс означает номер строки, второй — номер столбца), а сама*

матрица обозначается соответствующей буквой без индексов. Так, например, матрицу A типа $n \times m$ записывают следующим образом:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{array} \right\|.$$

Сокращенно матрицу можно записать так:

$$A = \| a_{kj} \| \quad (n \times m).$$

Если число столбцов равно единице ($m = 1$), то получим *матрицу-столбец*

$$x = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\|. \quad (5.2)$$

Если же число строк равно единице ($n = 1$), то получим *матрицу-строку*

$$y = \| y_1 \dots y_m \|. \quad (5.3)$$

Любой вектор x с составляющими x_1, \dots, x_n можно представить как матрицу-столбец x или матрицу-строку x . В связи с этим разложение вектора x по ортам (см. сноску на с. 22)

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (5.4)$$

и представление его в форме матрицы-столбца (5.2) будем считать эквивалентными.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*, а число ее строк (столбцов) называется *порядком матрицы*.

Определитель, состоящий из элементов некоторых k строк и k столбцов матрицы, называется *минором k -го порядка* данной матрицы. Так, например, минорами первого порядка будут сами элементы матрицы, и их число равно $n \cdot m$. Для матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \right\|$$

можно составить три существенно различных минора второго порядка

$$\left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{array} \right|.$$

Для квадратной матрицы A порядка n минор n -го порядка равен определителю матрицы A , который обозначается символом $\det A$ или $|A|$.

Две матрицы называются *равными*, если числа строк и столбцов их соответственно равны и равны их соответствующие элементы. Поэтому матричное равенство $A = B$ эквивалентно $n \cdot m$ скалярным равенствам

$$a_{kj} = b_{kj} \quad (k = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m). \quad (5.5)$$

Произведением матрицы на число называется новая матрица, элементы которой равны произведениям соответствующих элементов исходной матрицы на данное число, т. е.

$$\lambda A = \lambda \| a_{kj} \| = \| \lambda a_{kj} \|. \quad (5.6)$$

Например,

$$3 \left\| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 12 & 15 \end{array} \right\|.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается символом 0 .

Суммой матриц одного и того же типа называется новая матрица того же типа, элементы которой равны суммам соответствующих элементов слагаемых матриц. Например,

$$\left\| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} -3 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} -1 & 3 & 1 \\ 9 & -3 & 11 \end{array} \right\|.$$

Из сделанных определений следует (латинские буквы означают матрицы, греческие — скаляры):

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (A + B) + C, \\ A + B &= B + A, \\ A + 0 &= A, \\ (\alpha + \beta) A &= \alpha A + \beta A, \\ \alpha (A + B) &= \alpha A + \alpha B. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Произведением двух матриц A и B при условии, что число столбцов первой из них равно числу строк второй, называется третья матрица C , элементы которой образуются по следующему правилу:

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^m a_{ki} b_{ij}. \quad (5.8)$$

Словами это правило можно прочесть так: *элемент матрицы произведения AB , стоящий в k -й строке и j -м столбце, равен сумме произведений элементов k -й строки первой матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца второй матрицы B* . Например,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} &= \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Произведение двух матриц, вообще говоря, зависит от порядка сомножителей, т. е. в общем случае

$$AB \neq BA.$$

Пользуясь определением сложения и умножения матриц, легко показать, что

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Кроме того, легко установить, что *определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей*

$$\det(AB) = \det A \det B. \quad (5.9)$$

Сумма элементов, стоящих на главной диагонали квадратной матрицы, называется *следом матрицы*. След матрицы обозначается символом Sp . По определению имеем

$$\text{Sp } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}. \quad (5.10)$$

Квадратная матрица, все диагональные элементы которой равны единице, а остальные нулю, называется *единичной матрицей* и обозначается буквой E :

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Непосредственным вычислением легко установить равенства

$$AE = EA = A. \quad (5.11)$$

Квадратная матрица, имеющая вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix},$$

называется *диагональной*,

Если определитель квадратной матрицы не равен нулю, то матрица называется *неособенной*, в противном случае — *особенной*. Матрица A^{-1} называется *обратной* к A , если произведение AA^{-1} или $A^{-1}A$ равно единичной матрице E , то есть

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \quad (5.12)$$

Легко показать, что всякая неособенная матрица имеет обратную.

Если в матрице заменить строки, на столбцы и столбцы на строки, то получим новую матрицу, которая называется *транспонированной* по отношению к данной; обозначается транспонированная матрица той же буквой, но ставится штрих наверху справа. Так, для исходной матрицы

$$A = \| a_{kj} \|$$

транспонированной матрицей будет

$$A' = \| a_{jk} \|.$$

Операция транспонирования применима к любым матрицам, в частности, если транспонировать матрицу-столбец

$$x = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\|,$$

то получим матрицу-строку

$$x' = \| x_1, \dots, x_n \|.$$

Непосредственно из определений произведения и транспонирования матриц следует формула

$$(AB)' = B'A'. \quad (5.13)$$

Аналогичная формула справедлива для обратных матриц:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (5.14)$$

Так как определитель не меняется от замены его строк на столбцы и столбцов на строки, то определители транспонированной и исходной квадратных матриц равны

$$\det A' = \det A,$$

Квадратная матрица называется *симметричной*, если ее элементы, расположенные симметрично относительно

главной диагонали, равны между собой, иначе говоря, матрица называется симметричной, если ее элементы удовлетворяют равенствам

$$a_{kj} = a_{jk}.$$

Так, например, матрица

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

симметрична.

Очевидно, что транспонированная симметричная матрица равна исходной

$$A' = A. \quad (5.15)$$

Квадратная матрица называется *кососимметричной*, если ее элементы, стоящие на главной диагонали, равны нулю, а элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны по модулю, но противоположны по знаку, иначе говоря, матрица A называется кососимметричной, если ее элементы удовлетворяют равенствам

$$a_{kj} = -a_{jk}.$$

Так, например, матрица

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

кососимметричная.

Из сделанных определений следует, что для кососимметричной матрицы справедливо равенство

$$A' = -A. \quad (5.16)$$

В высшей алгебре доказывается, что *кососимметричный определитель нечетного порядка тождественно равен нулю*, а *кососимметричный определитель четного порядка представляет квадрат целой рациональной функции его элементов*. Таким образом, *кососимметричный определитель с вещественными элементами не отрицателен*.

Легко показать, что любую квадратную матрицу можно представить как сумму симметричной и кососимметричной матриц. Действительно, пусть

$$A = \|\alpha_{kj}\|$$

— произвольная квадратная матрица. Составим из нее две другие матрицы:

$$A = \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda'), \quad B = \frac{1}{2}(\Lambda - \Lambda'). \quad (5.17)$$

Очевидно, что матрица A симметрична, а матрица B кососимметрична. Равенство

$$\Lambda = A + B$$

доказывает сделанное замечание.

Квадратная матрица $\Lambda = \|\alpha_{kj}\|$ называется *ортогональной*, если ее произведение на транспонированную матрицу $\Lambda' = \|\alpha_{jk}\|$ равно единичной матрице

$$\Lambda\Lambda' = E.$$

Из этого определения вытекают несколько следствий, которым удовлетворяют ортогональные матрицы Λ :

1) транспонированная матрица Λ' равна обратной матрице Λ^{-1} :

$$\Lambda' = \Lambda^{-1};$$

2) определитель ортогональной матрицы равен ± 1 :

$$\Delta = \det \Lambda = \pm 1; \quad (5.18)$$

3) сумма квадратов элементов любой строки (столбца) равна единице:

$$\sum_j \alpha_{kj}^2 = \sum_k \alpha_{jk}^2 = 1;$$

4) сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие элементы другой строки (столбца) равна нулю

$$\sum_j \alpha_{kj} \alpha_{mj} = \sum_j \alpha_{jk} \alpha_{jm} = 0 \quad (k \neq m).$$

Если элементы матрицы зависят от скалярного параметра, например от времени t , то *производной матрицы по параметру* называется матрица, элементы которой равны производным по этому параметру. Таким образом, если $x = \|\alpha_{kj}\|$, то

$$\frac{dx}{dt} = \left\| \frac{d\alpha_{kj}}{dt} \right\|$$

или в других обозначениях

$$\dot{x} = \|\dot{\alpha}_{kj}\|.$$

До сих пор рассматривались матрицы, элементами которых служили числа. Можно представить себе матрицы, элементами которых являются не числа, а любые объекты. Нужно только, чтобы все действия с такими матрицами были определены и возможны. В частности, можно рассматривать сложные матрицы, элементы которых сами являются матрицами. Например, матрицу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 & c_2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_{11} & d_{12} \\ b_1 & b_2 & b_3 & d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}$$

можно короче записать так:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix},$$

где

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \\ B = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}.$$

б) Матричная форма записи системы дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения (5.1) можно записать в простой и компактной форме с помощью матриц. Действительно, введем в рассмотрение две матрицы.

1. Матрицу коэффициентов правой части уравнений (5.1)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. Матрицу-столбец или вектор

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}.$$

Составим матрицу из их произведения. Согласно формуле (5.8) будем иметь

$$Ax = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{vmatrix}, \quad (5.19)$$

или короче

$$Ax \cdot x = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} x_k x_j. \quad (5.23)$$

Если матрица A симметричная, то $a_{kj} = a_{jk}$ и мы получаем обычную квадратичную форму:

$$\begin{aligned} Ax \cdot x = & a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots \\ & \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj}x_kx_j \quad (a_{kj} = a_{jk}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Если квадратичная форма $Ax \cdot x$ определенно-положительна, то для простоты матрица A называется *определенно-положительной*.

Если матрица A кососимметричная, то $a_{kk} = 0$, $a_{kj} = -a_{jk}$, т. е. $a_{kj} + a_{jk} = 0$. На основании равенства (5.22) заключаем, что для кососимметричной матрицы A произведение

$$Ax \cdot x = 0. \quad (5.25)$$

Этим равенством мы воспользуемся в дальнейшем.

§ 5.3. Элементарные делители

Рассмотрим квадратную матрицу, элементы которой $f_{ij}(\lambda)$ являются полиномами от некоторого параметра λ :

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} f_{11}(\lambda) & \dots & f_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(\lambda) & \dots & f_{nn}(\lambda) \end{vmatrix}. \quad (5.26)$$

Такие матрицы называются λ -матрицами. Обозначим через $D_k(\lambda)$ ($k = 1, \dots, n$) *общий наибольший делитель* всех миноров k -го порядка матрицы (5.26), причем коэффициент при старшем члене выбираем равным единице. Легко показать, что многочлен $D_k(\lambda)$ делится на $D_{k-1}(\lambda)$. При определении общих наибольших делителей $D_k(\lambda)$ полезно иметь в виду следующее замечание: если какой-либо минор k -го порядка равен постоянной величине, то $D_k = D_{k-1} = \dots = D_1 = 1$ (так как этот минор должен делиться на D_k , а D_k делится на $D_{k-1}, D_{k-2}, \dots, D_1$).

Многочлен, равный отношению

$$\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)} = E_k(\lambda) \quad (k = 1, \dots, n; D_0 = 1), \quad (5.27)$$

называется *инвариантным множителем матрицы* (5.26). Очевидно, что

$$D_k(\lambda) = E_1(\lambda) \cdot E_2(\lambda) \dots E_k(\lambda),$$

а $D_n(\lambda)$ с точностью до постоянного множителя равен $\det F(\lambda)$:

$$D_n(\lambda) = \kappa \det F(\lambda) = E_1(\lambda) \cdot E_2(\lambda) \dots E_n(\lambda). \quad (5.28)$$

Разложим каждый инвариантный множитель $E_k(\lambda)$ на множители:

$$E_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{k1}} (\lambda - \lambda_2)^{e_{k2}} \dots (\lambda - \lambda_p)^{e_{kp}},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ — различные корни уравнения

$$\det F(\lambda) = 0. \quad (5.29)$$

Очевидно, что

$$e_{kr} \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n; r = 1, \dots, p).$$

Кроме того, $e_{kj} \leq e_{k'j}$, если $k < k'$ (так как $E_{k'}$ делится на E_k).

Двучлены $(\lambda - \lambda_r)^{e_{kr}}$, входящие множителями в $E_k(\lambda)$ и отличные от постоянного числа (т. е. при $e_{kr} > 0$), называются *элементарными делителями* λ -матрицы. Общее их число будем обозначать через m , а сами делители через $(\lambda - \lambda_1)^{e_1}, \dots, (\lambda - \lambda_m)^{e_m}$, причем среди чисел λ_i могут быть и равные (биномы $(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$ могут входить в разные инвариантные множители E_k).

Рассмотрим пример. Для матрицы

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda + 1)^3 & (\lambda + 1)^2 \\ \lambda + 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \quad (5.30)$$

можно составить четыре минора первого порядка:

$$(\lambda + 1)^3, (\lambda + 1)^2, \lambda + 1, \lambda + 1;$$

их общий наибольший делитель, очевидно, равен

$$D_1 = \lambda + 1.$$

Для матрицы (5.30) имеется один минор второго порядка

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 1)^3 & (\lambda + 1)^2 \\ \lambda + 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)^3$$

с общим наибольшим делителем

$$D_2 = \lambda(\lambda + 1)^3.$$

Пользуясь формулой (5.27), найдем инвариантные множители

$$E_1 = D_1 = \lambda + 1, \quad E_2 = \frac{D_2}{D_1} = \lambda(\lambda + 1)^2.$$

Элементарные делители для рассматриваемой матрицы будут

$$\lambda + 1, \lambda, (\lambda + 1)^2$$

с корнями

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = -1.$$

Эти же корни являются, конечно, корнями уравнения

$$\det F(\lambda) = 0,$$

но если для этого уравнения корень $\lambda = -1$ трехкратный, то этот же корень для одного элементарного делителя простой, а для другого двукратный.

Матрица

$$\left\| \begin{array}{cccc} E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_n \end{array} \right\|, \quad (5.31)$$

где E_1, E_2, \dots, E_n — инвариантные множители матрицы (5.26), называется *нормальной диагональной формой* этой матрицы. Например, нормальной диагональной формой для матрицы (5.30) будет матрица

$$\left\| \begin{array}{cc} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda + 1)^2 \end{array} \right\|.$$

Элементарными преобразованиями λ -матрицы называются следующие операции:

- а) перестановка двух строк или двух столбцов;
- б) умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) на один и тот же отличный от нуля постоянный множитель;
- в) сложение элементов некоторой строки (столбца), умноженных на один и тот же полином от λ , с соответствующими элементами другой строки (столбца).

Доказывается, что:

- а) элементарные преобразования не изменяют элементарные делители λ -матрицы;
- б) всякую λ -матрицу конечным числом элементарных преобразований можно привести к нормальной диагональной форме (5.31).

Покажем это на примере матрицы (5.30). Переставим в этой матрице вторую строку на место первой и второй столбец на место первого. Обозначим переход с помощью элементарных преобразо-

ваний от одной матрицы к другой стрелкой, получим

$$\left\| \begin{array}{cc} (\lambda + 1)^3 & (\lambda + 1)^2 \\ \lambda + 1 & \lambda + 1 \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{cc} \lambda + 1 & \lambda + 1 \\ (\lambda + 1)^2 & (\lambda + 1)^3 \end{array} \right\|.$$

Вычтем теперь элементы первого столбца из соответствующих элементов второго:

$$\left\| \begin{array}{cc} \lambda + 1 & \lambda + 1 \\ (\lambda + 1)^2 & (\lambda + 1)^3 \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{cc} \lambda + 1 & 0 \\ (\lambda + 1)^2 & \lambda (\lambda + 1)^2 \end{array} \right\|.$$

Умножим элементы первой строки на $\lambda + 1$ и вычтем из элементов второй строки:

$$\left\| \begin{array}{cc} \lambda + 1 & 0 \\ (\lambda + 1)^2 & \lambda (\lambda + 1)^2 \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{cc} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda (\lambda + 1)^2 \end{array} \right\|.$$

Полученная матрица является нормальной диагональной для матрицы (5.30).

Заметим, что элементарными преобразованиями часто пользуются для определения элементарных делителей.

Рассмотрим матрицу порядка e_1 следующего вида:

$$J_1 = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_1 \end{array} \right\|. \quad (5.32)$$

В этой квадратной матрице по главной диагонали стоит одно и то же число λ_1 , в диагонали под ней стоят единицы, а остальные элементы равны нулю. Матрица такого вида называется *клеткой Жордана* или *элементарным ящиком*. Составим λ -матрицу $J_1 - \lambda E$ (напомним, что E — единичная матрица):

$$J_1 - \lambda E = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 - \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 - \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_1 - \lambda \end{array} \right\|. \quad (5.33)$$

Вычеркнем из этой матрицы первую строку и последний столбец и из оставшихся элементов составим минор порядка $e_1 - 1$:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & \lambda_1 - \lambda & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right|.$$

Так как этот минор равен единице, то $D_1 = D_2 = \dots = D_{e_1-1} = 1$ (см. с. 133). С другой стороны, единственный минор порядка e_1 равен

$$\det (J_1 - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{e_1}.$$

Следовательно,

$$D_{e_1} = (\lambda - \lambda_1)^{e_1}$$

(в скобках переставлены местами λ и λ_1 , так как старший член в D_{e_1} должен иметь коэффициент, равный единице).

Пользуясь формулой (5.27), найдем для матрицы инвариантные множители

$$E_1 = 1, E_2 = 1, \dots, E_{e_1-1} = 1, E_{e_1} = (\lambda - \lambda_1)^{e_1}.$$

Из этого следует, что матрица $J_1 - \lambda E$ имеет только один элементарный делитель, равный $(\lambda - \lambda_1)^{e_1}$.

Пусть теперь A — произвольная квадратная матрица, элементы которой постоянные числа a_{kj} . Составим λ -матрицу $A - \lambda E$ (она называется *характеристической* для матрицы A)

$$A - \lambda E = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}. \quad (5.34)$$

Найдем элементарные делители этой матрицы

$$(\lambda - \lambda_1)^{e_1}, (\lambda - \lambda_2)^{e_2}, \dots, (\lambda - \lambda_m)^{e_m}.$$

Каждому корню λ_k ($k = 1, \dots, m$) элементарного делителя соответствует своя клетка Жордана J_k . *Нормальной формой Жордана* для данной матрицы A называется матрица, диагональные элементы которой равны клеткам Жордана, а все прочие элементы нулю:

$$J = \begin{vmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_m & \\ & & & & \ddots \end{vmatrix}. \quad (5.35)$$

Очевидно, что элементарные делители матрицы $J - \lambda E$ совпадают с элементарными делителями характеристической матрицы. Заметим также, что корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$ совпадают с корнями элементарных делителей.

Пример 1.

$$A = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}. \quad (5.36)$$

Для того чтобы привести эту матрицу к нормальной форме Жордана, нужно прежде всего найти элементарные делители характеристической матрицы (5.34):

$$A - \lambda E = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 - \lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 - \lambda & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Для этого воспользуемся элементарными преобразованиями. Умножим первую строку на -1 , затем умножим последний столбец сначала на $-(2 + \lambda)$ и сложим его с первым столбцом (чтобы получить в верхнем углу нуль); после этого вычтем из второго и третьего столбцов последний столбец (чтобы в верхней строке получить еще два нуля):

$$A - \lambda E \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -(1 + \lambda) & 0 & 0 \\ -2 + \lambda & 2 & -\lambda & -1 \\ 1 + \lambda^2 & -(1 - \lambda) & \lambda & 2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Сложим первую строку с третьей, потом умножим первую строку на $2 - \lambda$ и вычтем ее из четвертой; после этого переставим последний столбец на место первого:

$$A - \lambda E \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -(1 + \lambda) & 0 \\ 0 & -2 + \lambda & 2 & -\lambda \\ 0 & 1 + \lambda^2 & -(1 - \lambda) & \lambda \end{vmatrix}.$$

Умножим второй столбец на $1 + \lambda$ и добавим его к третьему столбцу (чтобы получить во второй строке еще один нуль):

$$A - \lambda E \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 + \lambda & -\lambda(1 - \lambda) & -\lambda \\ 0 & 1 + \lambda^2 & \lambda(2 + \lambda + \lambda^2) & \lambda \end{vmatrix}.$$

Теперь во втором столбце после единицы можно поставить нули (для этого достаточно умножить вторую строку сначала на $2 - \lambda$ и сложить с третьей строкой, затем умножить вторую строку на $-(1 + \lambda)^2$ и сложить с четвертой строкой). После этого умножим четвертый столбец на $-(1 - \lambda)$ и добавим к третьему столбцу:

$$A - \lambda E \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(1 + \lambda)^2 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Сложим третью строку с четвертой, затем умножим эту строку на -1 и переставим четвертый столбец на место третьего:

$$A - \lambda E \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(1 + \lambda)^2 \end{vmatrix}. \quad (5.37)$$

Получилась нормальная диагональная форма характеристической матрицы $A - \lambda E$. Из нее находим

$$E_1 = 1, \quad E_2 = 1, \quad E_3 = \lambda, \quad E_4 = \lambda(\lambda + 1)^2.$$

Следовательно, матрица $A - \lambda E$ имеет три элементарных делителя:

$$\lambda, \lambda, (\lambda + 1)^2,$$

которым отвечают корни

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -1.$$

Конечно, эти корни являются одновременно корнями характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Отметим существенное для дальнейшего обстоятельство: корни элементарных делителей и корни характеристического уравнения всегда совпадают, но их кратность может быть различна. В данном примере как раз имеет место этот случай: нулевой корень имеет вторую кратность для характеристического уравнения, но он простой для элементарных делителей (так как двум нулевым корням отвечают два элементарных делителя). Корни $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$ имеют одинаковую кратность как для характеристического уравнения, так и для элементарных делителей.

Каждому элементарному делителю отвечает своя клетка Жордана (см. равенство (5.32)) ($\lambda_1 = 0, e_1 = 1$; $\lambda_2 = 0, e_2 = 1$; $\lambda_3 = -1, e_3 = 2$):

$$J_1 = \|0\|, \quad J_2 = \|0\|, \quad J_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Теперь легко строится нормальная форма Жордана для рассматриваемой матрицы:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & -1 & 0 \\ & & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad (5.38)$$

причем незаполненные элементы равны нулю.

Пример 2.

$$A = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -2 & -2 \\ 6 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}. \quad (5.39)$$

Составим характеристическую матрицу

$$A - \lambda E = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 - \lambda & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -2 - \lambda & -2 \\ 6 & 2 & 3 & 3 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Элементарными преобразованиями эта λ -матрица приводится к нормальной диагональной форме (читатель без труда выполнит самостоятельно необходимые действия):

$$A - \lambda E \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda + 1)^2 \end{vmatrix}.$$

Из нее находим инвариантные множители:

$$E_1 = 1, \quad E_2 = 1, \quad E_3 = 1, \quad E_4 = \lambda^2(\lambda + 1)^2.$$

Следовательно, матрица $A - \lambda E$ в этом случае имеет только два элементарных делителя

$$\lambda^2, (\lambda + 1)^2,$$

которым отвечают корни

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -1.$$

В данном примере кратность нулевого корня и вещественного отрицательного корня одинакова как для характеристического уравнения, так и для элементарных делителей.

Каждому элементарному делителю отвечает своя клетка Жордана (см. равенство (5.32)):

$$J_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Теперь легко строится нормальная форма Жордана для рассматриваемой матрицы

$$J = \left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & -1 & 0 \\ & & 1 & -1 \end{array} \right\|, \quad (5.40)$$

причем незаполненные элементы равны нулю.

Обратим внимание на следующие обстоятельства: характеристические уравнения в обоих примерах имеют одинаковые корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Однако нормальные формы Жордана разные. Это объясняется тем, что в первом примере характеристическая матрица имеет три элементарных делителя, а во втором примере — только два.

В заключение приведем две теоремы линейной алгебры, которые нам понадобятся в дальнейшем (см., например, [9, 14]).

Теорема 1. Если матрица Λ неособенная, то элементарные делители матриц $A - \lambda E$ и $\Lambda A \Lambda^{-1} - \lambda E$ одинаковы. Обратно, если элементарные делители матриц $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$ одинаковы, то всегда найдется такая неособенная матрица Λ , что

$$B = \Lambda A \Lambda^{-1}. \quad (5.41)$$

Некоторые авторы называют эту теорему основной теоремой линейной алгебры.

Теорема 2. Если квадратные матрицы A и C порядка s симметричны, причем матрица A знакоопределенная, то:

1) все корни характеристического уравнения

$$\det(A\lambda + C) = 0$$

вещественны;

2) всегда найдется такая неособенная матрица Λ , что

$$\Lambda' A \Lambda = E, \quad \Lambda' C \Lambda = C_0, \quad (5.42)$$

где E — единичная, а C_0 — диагональная матрицы,

$$C_0 = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_s \end{vmatrix}, \quad (5.43)$$

причем c_1, c_2, \dots, c_s равны корням характеристического уравнения.

Вторая часть теоремы равносильна, очевидно, следующему утверждению: если даны две квадратичные формы

$$T = \frac{1}{2} Ax \cdot x = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s a_{kj} x_k x_j,$$

$$II = \frac{1}{2} Cx \cdot x = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s c_{kj} x_k x_j,$$

причем первая из них определенно-положительна, то всегда найдется такое преобразование

$$x = \Lambda z$$

с неособенной матрицей Λ , что в новых переменных обе квадратичные формы будут равны суммам квадратов:

$$T = \frac{1}{2} z \cdot z = \frac{1}{2} (z_1^2 + \dots + z_s^2),$$

$$II = \frac{1}{2} C_0 z \cdot z = \frac{1}{2} (c_1 z_1^2 + \dots + c_s z_s^2),$$

причем в первой из них (определенно-положительной) все коэффициенты равны единице.

Применим ко второму равенству (5.42) формулу (5.9):

$$\det C_0 = \det \Lambda' \cdot \det C \cdot \det \Lambda.$$

Учитывая, что $\det \Lambda' = \det \Lambda$, получим

$$\det C_0 = \Delta^2 \det C,$$

где $\Delta = \det \Lambda$ — определитель матрицы преобразования.

Так как матрица C_0 диагональная, то $\det C_0 = c_1 c_2 \dots c_s$. Следовательно,

$$c_1 c_2 \dots c_s = \Delta^2 \det C.$$

Если матрица преобразования ортогональна, то $\Delta = \pm 1$ (см. (5.18)) и последнее равенство примет вид

$$c_1 \dots c_s = \det C. \quad (5.44)$$

Кроме того, легко доказывается, что при ортогональном преобразовании след произвольной квадратной матрицы B равен следу матрицы $\Lambda' B \Lambda$, т. е.

$$\text{Sp } B = \text{Sp } \Lambda' B \Lambda. \quad (5.45)$$

§ 5.4. Устойчивость линейных автономных систем.

Устойчивость резонанса. Примеры

Пусть возмущенное движение определяется системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Будем считать, что эти уравнения приведены к нормальной форме:

$$\dot{x} = Ax, \quad (5.46)$$

где x — матрица-столбец (вектор), а A — квадратная матрица.

С помощью линейного преобразования перейдем от вектора x к вектору z (от переменных x_1, x_2, \dots, x_n к переменным z_1, z_2, \dots, z_n)

$$z = \Lambda x \quad (5.47)$$

с неособенной матрицей $\Lambda = \|\alpha_{kj}\|$.

Найдем обратное преобразование вектора z в вектор x . Для этого умножим слева обе части равенства (5.47) на матрицу Λ^{-1} (обратная матрица для Λ существует, так

как матрица Λ неособенная)

$$\Lambda^{-1}z = \Lambda^{-1}\Lambda x$$

или, учитывая, что $\Lambda^{-1}\Lambda x = (\Lambda^{-1}\Lambda)x = Ex = x$ (см. (5.12)),

$$x = \Lambda^{-1}z. \quad (5.48)$$

Продифференцируем это равенство по времени

$$\Lambda^{-1}\dot{z} = \dot{x}.$$

Заменим \dot{x} , согласно уравнению (5.46), на Ax :

$$\Lambda^{-1}\dot{z} = Ax;$$

принимая во внимание обратное преобразование (5.48), найдем

$$\Lambda^{-1}\dot{z} = A\Lambda^{-1}z.$$

Умножив обе части этого равенства слева на матрицу преобразования Λ и учтя, что $\Lambda\Lambda^{-1}\dot{z} = E\dot{z} = \dot{z}$, получим

$$\dot{z} = Bz, \quad (5.49)$$

где матрица B определена равенством

$$B = \Lambda A \Lambda^{-1}. \quad (5.50)$$

Таким образом, преобразование (5.47) переводит матричное уравнение возмущенного движения (5.46) с искомым вектором x в матричное уравнение (5.49) с искомым вектором z . Очевидно, что если движение устойчиво (неустойчиво) относительно переменного вектора z , то оно будет устойчиво (неустойчиво) относительно переменного вектора x , и наоборот.

Из равенства (5.50) и сформулированной теоремы линейной алгебры (см. (5.41)) следует, что элементарные делители матриц $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$ имеют одинаковые делители. Пользуясь этим свойством преобразованной системы (5.49), можно задавать не линейное преобразование (5.47), а матрицу B , выбрав ее из условия равенства элементарных делителей характеристических матриц $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$.

За новое дифференциальное уравнение (5.49) возьмем такое, матрица коэффициентов которого является нормальной формой Жордана для матрицы A исходного

уравнения (5.46):

$$B = \begin{vmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_m} \end{vmatrix}, \quad (5.51)$$

где

$$B_k = \begin{vmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{vmatrix}.$$

Переменный вектор z , входящий в преобразованное уравнение (5.49) с матрицей коэффициентов (5.51), называется *каноническим вектором*, а его элементы z_1, z_2, \dots, z_n — *каноническими переменными*.

Отметим, что для перехода к каноническим переменным формула преобразования (5.47) не нужна — нужно знать только элементарные делители матрицы $A - \lambda E$.

Дифференциальные уравнения в канонических переменных разобьются на m независимых друг от друга групп, каждая из которых соответствует своему элементарному делителю или своей клетке Жордана B_k . Выпишем одну первую группу (остальные имеют аналогичную структуру):

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1, \\ \dot{z}_2 &= z_1 + \lambda_1 z_2, \\ \dot{z}_3 &= z_2 + \lambda_1 z_3, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{z}_{e_1} &= z_{e_1-1} + \lambda_1 z_{e_1}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Уравнения (5.52) интегрируются элементарно. Действительно, из первого уравнения сразу находим

$$z_1 = z_{01} e^{\lambda_1 t},$$

где z_{01} — начальное значение z_1 . Вносим полученное значение для z_1 во второе уравнение

$$\dot{z}_2 - \lambda_1 z_2 = z_{01} e^{\lambda_1 t}.$$

Интегрируя его, получим

$$z_2 = (z_{02} + z_{01} t) e^{\lambda_1 t}.$$

1. Если вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

2. Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один, вещественная часть которого положительна, то невозмущенное движение неустойчиво.

3. Если некоторые корни характеристического уравнения имеют нулевые вещественные части, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части, то:

а) невозмущенное движение будет устойчивым (не асимптотически), если корням с нулевой вещественной частью отвечают простые элементарные делители (то есть соответствующие $e_k = 1$);

б) невозмущенное движение будет неустойчивым, если хотя бы один корень с нулевой вещественной частью является кратным корнем соответствующего элементарного делителя ($e_k > 1$).

Прежде чем перейти к примерам, сделаем три замечания.

1. При исследовании устойчивости линейных стационарных систем нужно прежде всего определить корни характеристического уравнения. Если вещественные части всех корней отрицательны или имеется хотя бы один корень, вещественная часть которого положительна, то вопрос об устойчивости решен и нет смысла исследовать элементарные делители, т. е. решать задачу более сложную. Точно так же задача сразу решается, если корни с нулевыми вещественными частями простые (в этом случае корням с нулевой вещественной частью соответствуют простые элементарные делители), а остальные корни имеют отрицательную вещественную часть.

Таким образом, к определению элементарных делителей нужно прибегать только в том случае, если среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни с нулевой вещественной частью, а вещественные части остальных корней отрицательны.

2. В некоторых случаях необходимо ответить не только на вопрос об устойчивости движения, но и определить матрицу преобразования Λ переменных x_1, x_2, \dots, x_n в канонические переменные z_1, z_2, \dots, z_n . Для этого рациональнее всего воспользоваться равенством (5.50), которое умножением справа на матрицу Λ приводится к виду

$$B\Lambda = \Lambda A. \quad (5.55)$$

Это матричное уравнение относительно Λ содержит две известные матрицы (A задана, а B — нормальная форма Жордана для A и, следовательно, находится по A). Матричное уравнение (5.55) эквивалентно n^2 скалярным однородным уравнениям относительно α_{kj} , выражающим равенство соответствующих элементов. Поэтому имеется бесчисленное множество матриц преобразования Λ .

Обратную матрицу Λ^{-1} можно найти из уравнения

$$\Lambda^{-1}B = A\Lambda^{-1}, \quad (5.56)$$

которое получается умножением равенства (5.50) слева на Λ^{-1} .

3. Очень часто исходные уравнения возмущенного движения не приведены к нормальной форме и содержат производные порядка выше первого. Для того, чтобы определить элементарные делители и решить вопрос об устойчивости, нет нужды приводить систему к нормальной форме — достаточно составить характеристическую λ -матрицу для исходной системы и исследовать ее. Покажем это на примере уравнения

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0. \quad (5.57)$$

Для исследования на устойчивость относительно матриц-столбцов \dot{x} и x достаточно определить элементарные делители характеристической λ -матрицы

$$f(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C. \quad (5.58)$$

Действительно, перейдем к системе первого порядка, для чего положим $\dot{x} = y$. Тогда уравнение (5.57) заменит-ся системой двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y,$$

$$A\dot{y} = -By - Cx.$$

Характеристическая матрица этой системы имеет вид (элементами служат матрицы)

$$f_1(\lambda) = \begin{vmatrix} -E\lambda & E \\ -C & -A\lambda - B \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся элементарными преобразованиями: умножим второй столбец на λ и сложим его с первым, после чего переставим их

$$f_1(\lambda) \rightarrow \begin{vmatrix} E & 0 \\ -A\lambda - B & -A\lambda^2 - B\lambda - C \end{vmatrix}.$$

Первую строку умножим на $A\lambda + B$ и сложим со второй, затем умножим второй столбец на -1 :

$$f_1(\lambda) \rightarrow \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & A\lambda^2 + B\lambda + C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & f(\lambda) \end{vmatrix},$$

что доказывает сделанное замечание.

Пример 1. Исследуем устойчивость системы, уравнения возмущенного движения которой имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= -4x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \\ \dot{x}_4 &= 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

В примере 1 § 5.3 было установлено, что характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ этой матрицы имеет два нулевых корня и два корня, равных -1 . Последний корень кратный как относительно характеристического уравнения, так и относительно элементарного делителя, но он не может испортить устойчивость (так как он вещественный отрицательный). Что касается нулевого корня, то хотя он второй кратности для характеристического уравнения, но простой для элементарных делителей. Следовательно, невозмущенное движение устойчиво относительно переменных x_1, x_2, x_3, x_4 .

Проиллюстрируем этот вывод. Уравнения возмущенного движения в канонических переменных состоят из трех независимых между собой групп (см. нормальную форму Жордана (5.38) для матрицы A):

$$\dot{z}_1 = 0, \quad \dot{z}_2 = 0, \quad \dot{z}_3 = -z_3, \quad \dot{z}_4 = z_3 - z_4$$

(первая группа — первое уравнение, вторая группа — второе уравнение, третья группа — последние два уравнения). Напишем общее решение этих уравнений:

$$z_1 = z_{01}, \quad z_2 = z_{02}, \quad z_3 = z_{03}e^{-t}, \quad z_4 = (z_{04} + z_{03}t)e^{-t}.$$

При $t \rightarrow +\infty$ переменные z_3 и z_4 стремятся к нулю, а z_1 и z_2 остаются без изменения, и при соответствующих начальных условиях их модули могут быть сделаны сколь угодно малыми. Следовательно, как уже было отмечено, невозмущенное движение устойчиво относительно совокупности канонических переменных z_1, z_2, z_3, z_4 и тем самым относительно переменных x_1, x_2, x_3, x_4 .

Пример 2. Исследуем устойчивость системы, уравнения возмущенного движения которой имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= -5x_1 - 2x_3 - 2x_4, \\ \dot{x}_4 &= 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4. \end{aligned}$$

Матрица правой части этих уравнений была рассмотрена в примере 2 § 5.3 (см. матрицу (5.39)). Было установлено, что характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ этой матрицы имеет два нулевых корня и два корня, равных -1 . Оба корня кратные

как относительно характеристического уравнения, так и относительно элементарных делителей. Так как нулевой корень кратен относительно элементарного делителя, то невозмущенное движение неустойчиво относительно x_1, x_2, x_3, x_4 .

Проиллюстрируем этот вывод. Уравнения возмущенного движения в канонических переменных состоят из двух независимых между собой групп (см. нормальную форму Жордана (5.40)):

$$\dot{z}_1 = 0, \quad \dot{z}_2 = z_1, \quad \dot{z}_3 = -z_3, \quad \dot{z}_4 = z_3 - z_4$$

(первая группа состоит из первого и второго уравнений, а вторая — из третьего и четвертого уравнений). Напишем общее решение этих уравнений:

$$z_1 = z_{01}, \quad z_2 = z_{02} + z_{01}t, \quad z_3 = z_{03}e^{-t}, \quad z_4 = (z_{04} + z_{03}t)e^{-t}.$$

Так как $z_2 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то невозмущенное движение неустойчиво относительно совокупности канонических переменных z_1, z_2, z_3, z_4 и, следовательно, относительно x_1, x_2, x_3, x_4 .

Пример 3. Устойчивость резонанса. Рассмотрим простейший линейный колебательный контур, на который действует возмущение, изменяющееся по гармоническому закону. Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + k^2x = H \cos \omega t. \quad (5.59)$$

Здесь x — координата, определяющая состояние контура (линейное или угловое перемещение, заряд и т. п.), k — частота его собственных колебаний, ω — частота возмущающего воздействия, $H = \text{const}$.

Из элементарного курса физики известно, что при совпадении частот ($k = \omega$) наступает резонанс, при котором вынужденные колебания определяются равенством (график этого движения показан на рис. 5.1)

$$x = \frac{H}{2\omega} t \sin \omega t. \quad (5.60)$$

Примем это движение за невозмущенное. Тогда уравнение возмущенного движения будет представлять однородную часть линейного уравнения (5.59) — см. пример 3 § 1.3:

$$\ddot{x} + k^2x = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Так как корни $\lambda = \pm ki$ этого уравнения чисто мнимые и различные, то резонанс (5.60) устойчив, но не асимптотически. Некоторым этот результат кажется неожиданным, но следует иметь в виду, что доказана устойчивость процесса, при котором амплитуды вынужденных колебаний неограниченно возрастают, иначе говоря, небольшие возмущения не могут изменить общий характер движения, изображенного на рис. 5.1.

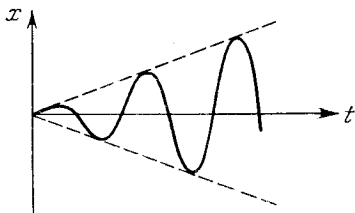


Рис. 5.1

ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

§ 6.1. Введение

Общие методы исследования устойчивости движения Ляпунова сильны прежде всего своей универсальностью, и именно поэтому они не могут содержать анализа различных физических факторов, влияющих на устойчивость движения. Между тем во многих случаях такой анализ, проведенный в достаточно общем виде, может оказаться весьма полезным. В этой главе мы рассмотрим, как влияют на устойчивость движения различные силы.

Исследование влияния структуры сил на устойчивость движения началось по существу с работ Томсона и Тета ¹⁾. В 1879 г. они дали общее определение гироскопических сил и доказали четыре теоремы об устойчивости движения. Это направление не развивалось около семидесяти лет. По-видимому, это можно объяснить тем, что за эти годы была создана общая теория устойчивости движения с ее эффективными методами исследования. Другая причина состоит в том, что теоремы Томсона и Тета были сформулированы только для линейных автономных систем. Наконец, эта теория не включала неконсервативные позиционные силы, значение которых для многочисленных технических приложений прояснилось в полной мере лишь за последние десятилетия.

В начале пятидесятых годов нашего столетия снова возник интерес к вопросам исследования устойчивости движения по структуре действующих сил. Было дано строгое доказательство теорем Томсона и Тета, затем эти теоремы были распространены на нелинейные системы и были получены новые результаты, охватывающие неконсервативные позиционные силы. Эти результаты позволяют составить отчетливое физическое представление о влиянии

¹⁾ Теорема Лагранжа об устойчивости равновесия (см. § 3.1), имеющая непосредственное отношение к изучаемому вопросу, доказана в годы, когда рассматривались практически только консервативные системы.

различных сил на устойчивость движения. Поэтому даже в тех случаях, когда применение их не упрощает чисто вычислительной части анализа, они могут оказаться полезными для качественной оценки отдельных факторов, влияющих на устойчивость движения, особенно в процессе проектирования на этапе завязки системы (см. пример 3 § 6.6 и др.).

§ 6.2. Классификация сил

Будем считать, что положение системы определяется s обобщенными координатами q_1, \dots, q_s , а движение ее описывается уравнениями Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k(q, \dot{q}) \quad (k = 1, \dots, s). \quad (6.1)$$

В этих уравнениях кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (6.2)$$

представляет определенно-положительную квадратичную форму обобщенных скоростей \dot{q} с коэффициентами инерции $a_{kj}(q) = a_{jk}(q)$, зависящими от координат q , а обобщенные силы Q_k являются функциями координат q и скоростей \dot{q} .

Для большей наглядности введем в рассмотрение s -мерное ортогональное пространство (q_1, \dots, q_s) и два вектора:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_s \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что первый вектор определяет изображающую точку M , а второй — силу, приложенную к этой точке.

Перейдем теперь к характеристике сил.

а. Л и н е й н ы е с и л ы. Рассмотрим сначала случай, когда сила \mathbf{Q} линейно зависит от радиуса-вектора \mathbf{q} и скорости $\dot{\mathbf{q}}$ изображающей точки

$$\mathbf{Q} = -C_1 \mathbf{q} - B_1 \dot{\mathbf{q}}, \quad (6.3)$$

где C_1 и B_1 — заданные квадратные матрицы порядка $s \times s$ с постоянными элементами.

Разобьем матрицы C_1 и B_1 на симметричные C и B и кососимметричные P и G части, положив (см. (5.15)—(5.17))

$$C_1 = C + P, \quad B_1 = B + G, \quad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned} C = C' &= \frac{1}{2}(C_1 + C'_1), & P = -P' &= \frac{1}{2}(C_1 - C'_1), \\ B = B' &= \frac{1}{2}(B_1 + B'_1), & G = -G' &= \frac{1}{2}(B_1 - B'_1). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Теперь сила Q принимает вид

$$Q = K + R + D + \Gamma. \quad (6.6)$$

Здесь

$$K = -Cq, \quad R = -Pq, \quad D = -B\dot{q}, \quad \Gamma = -G\dot{q}. \quad (6.7)$$

Сила $K = -Cq$ с симметричной матрицей $C = \|c_{kj}\|$ называется *потенциальной* или *консервативной*, а квадратичная форма

$$\Pi = \frac{1}{2} Cq \cdot q = \frac{1}{2} \sum_k \sum_j c_{kj} q_k q_j \quad (6.8)$$

равна потенциальной энергии системы.

Составим с помощью симметричной матрицы $B = \|b_{kj}\|$ квадратичную форму

$$F = \frac{1}{2} B\dot{q} \cdot \dot{q} = \frac{1}{2} \sum_k \sum_j b_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j. \quad (6.9)$$

Если эта функция не отрицательна, то она называется *функцией рассеивания* или *диссипативной функцией Релея*; соответствующие силы $D = -B\dot{q}$ называются *диссипативными* силами с положительным сопротивлением (или просто *диссипативными* силами). Если квадратичная форма F определено-положительна, то диссипация называется *полной*, в противном случае — *неполной*. Наконец, если функция F может принимать отрицательные значения, то среди составляющих силы $D = -B\dot{q}$ имеются *ускоряющие* силы (*силы отрицательного сопротивления*). Обычно диссипативные силы с положительным сопротивлением возникают естественным образом при движении тел в сопротивляющейся среде, в электрических цепях при наличии омического сопротивления и т. п. Ускоряющие силы (силы отрицательного сопротивления), как правило, создаются с помощью специальных устройств (см. пример 3 § 6.6).

Силы $\Gamma = -G\dot{q}$, линейно зависящие от скоростей \dot{q} и имеющие кососимметричную матрицу коэффициентов $G = \|g_{kj}\|$, называются, как уже говорилось в § 3.3, *гироскопическими*. Чаще всего эти силы встречаются в системах, содержащих гироскопы, но они могут быть и в других системах (см. пример § 6.7).

Силы $R = -Pq$, линейно зависящие от координат q с кососимметричной матрицей коэффициентов $P = \|p_{kj}\|$, называются *неконсервативными позиционными* или просто *неконсервативными силами*¹⁾. Неконсервативные позиционные силы возникают как естественным образом, так и с помощью специальных устройств (см. § 6.9).

Рассмотрим пример. Пусть силы Q_1 и Q_2 имеют вид

$$\begin{aligned} Q_1 &= -5\dot{q}_1 + q_1 - 2q_2, \\ Q_2 &= 2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 - 6q_1 - 5q_2. \end{aligned}$$

Составим матрицы C_1 и B_1 :

$$C_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Найдем транспонированные матрицы C'_1 и B'_1 (в матрицах C_1 и B_1 переставляем строки и столбцы):

$$C'_1 = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad B'_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Разложим матрицы C_1 и B_1 на симметричные и кососимметричные части:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}(C_1 + C'_1) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, & P &= \frac{1}{2}(C_1 - C'_1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \\ B &= \frac{1}{2}(B_1 + B'_1) = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, & G &= \frac{1}{2}(B_1 - B'_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

¹⁾ Неконсервативные позиционные силы не имеют твердо установленного названия. Г. Циглер называет эти силы *циркуляционными* [59, 60], в теории гироскопических систем их называют силами *радиальной коррекции* [38], в теории упругости их называют просто *неконсервативными силами* [11], некоторые авторы называют их *собственно* или *существенно неконсервативными силами*, *псевдогироскопическими силами*, силами *ограниченного демпфирования* (последний термин распространен в американской научной литературе, посвященной космическим исследованиям). Первые два названия легко оправдать физическими соображениями, но, по-видимому, термин «неконсервативные позиционные силы» является наиболее точным: позиционные, так как они зависят от координат системы, неконсервативные, так как работа их зависит от пути и для них не существует интеграла энергии. Для простоты мы будем иногда называть неконсервативные позиционные силы просто неконсервативными силами.

Найдем потенциальную энергию Π и функцию Релея F :

$$\Pi = 1/2 (-q_1^3 + 8q_1q_2 + 5q_2^2),$$

$$F = 1/2 (5\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \dot{q}_2^2).$$

В данном примере функция Релея F может принимать как положительные значения (например, при $\dot{q}_1 \neq 0$ и $\dot{q}_2 = 0$), так и отрицательные значения (например, при $\dot{q}_1 = 0$ и $\dot{q}_2 \neq 0$). Поэтому диссипативная сила $-B\dot{q}$ имеет положительные и отрицательные составляющие. Матрицы-столбцы потенциальных $-Cq$, неконсервативных $-Pq$, диссипативных $-B\dot{q}$ и гироскопических $-G\dot{q}$ сил соответственно равны:

$$\begin{vmatrix} q_1 - 4q_2 \\ -4q_1 - 5q_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2q_2 \\ -2q_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -5\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{vmatrix}.$$

б. Н е л и н е й н ы е с и л ы. Приведенная классификация линейных сил по их математической структуре очень удобна для линейных систем, особенно при исследовании устойчивости движения. Однако для нелинейных сил этот метод неприменим. Поэтому для общей характеристики сил воспользуемся их физическими свойствами.

Как известно, работа потенциальной силы $\mathbf{K}(q)$ не зависит от пути перемещения точки приложения силы. Для этой силы справедливо равенство

$$\mathbf{K}(q) = -\text{grad } \Pi \quad (6.10)$$

или для составляющих

$$K_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.11)$$

где Π — потенциальная энергия.

Для того чтобы некоторая сила $\mathbf{K}(q)$, зависящая от положения изображающей точки M , была потенциальной, необходимо и достаточно, чтобы ее проекции удовлетворяли равенствам (число их равно числу сочетаний из s по два)

$$\frac{\partial K_j}{\partial q_k} = \frac{\partial K_k}{\partial q_j} \quad (k, j = 1, \dots, s) \quad (6.12)$$

(необходимость этих условий вытекает непосредственно из (6.11)).

Справедливость формул (6.10)—(6.12) для линейной силы $\mathbf{K} = -Cq$ следует из равенства (6.8).

По определению Томсона и Тета [58] сила $\Gamma(\dot{q})$ называется *гироскопической*, если мощность (работа) ее

тождественно равна нулю

$$\Gamma \cdot \dot{q} = \sum_{k=1}^s \Gamma_k \dot{q}_k \equiv 0. \quad (6.13)$$

Из этого определения следует, что гироскопическая сила перпендикулярна скорости \dot{q} изображающей точки M . Линейная сила $\Gamma = -G\dot{q}$ удовлетворяет этому условию, так как в силу косои симметрии матрицы G произведение $\Gamma \cdot \dot{q} = -G\dot{q} \cdot \dot{q}$ тождественно равно нулю (см. равенство (5.25)).

Сила $D(\dot{q})$, зависящая от скорости \dot{q} изображающей точки M , называется *диссипативной* силой с положительным или отрицательным сопротивлением, если ее мощность не равна нулю тождественно. Диссипативным силам положительного сопротивления отвечает отрицательная мощность

$$N = D \cdot \dot{q} = \sum_{k=1}^s D_k \dot{q}_k \leq 0 \quad (6.14)$$

(знак равенства в этом соотношении не может быть тождественным), а силам отрицательного сопротивления — положительная мощность. Если мощность $N(\dot{q})$ является определенно-отрицательной функцией скоростей \dot{q}_k , то диссипацию назовем *полной*; если же мощность $N(\dot{q})$ — просто отрицательная функция скоростей \dot{q}_k , то диссипацию назовем *неполной* или *частичной* (в дальнейшем будет показано, что из этих общих определений следуют соответствующие определения, введенные для линейных сил сопротивления).

Нам осталось дать общее определение неконсервативных позиционных сил. Из определения линейной неконсервативной силы следует, что она *перпендикулярна* радиусу-вектору q изображающей точки M ($R \cdot q = -Pq \cdot q \equiv 0$, так как матрица P — кососимметричная). Обобщая это свойство, будем называть *любую силу $R(q)$, зависящую от координат системы q_k , неконсервативной позиционной силой, если она ортогональна радиусу-вектору q изображающей точки*

$$R \cdot q = \sum_{k=1}^s R_k q_k \equiv 0. \quad (6.15)$$

Выше было показано, что произвольные силы, линейно зависящие от координат и скоростей системы, можно

разложить на потенциальные K , неконсервативные позиционные R , гироскопические Γ и диссипативные D силы. Покажем, что аналогичное разложение можно привести для широкого класса нелинейных сил.

Теорема. Любую непрерывную вместе со своими производными первого порядка силу $Q(q)$, зависящую только от положения системы, можно разложить на потенциальную и неконсервативную позиционную, составляющие

$$Q(q) = -\text{grad } \Pi + R(q), \quad (6.16)$$

где поле R и потенциальная энергия Π подлежат определению¹⁾.

Доказательство. Умножим обе части равенства (6.16) скалярно на радиус-вектор изображающей точки q :

$$Q \cdot q = -(\text{grad } \Pi) \cdot q + R \cdot q, \quad (6.17)$$

¹⁾ Этой теореме можно придать другой, более общий, вид, не связывая ее с разложением сил [40]. Действительно, назовем для краткости поле векторов $R(q)$, удовлетворяющее условию ортогональности (6.15), циркуляционным. Тогда будет справедлива следующая теорема: произвольное непрерывное вместе со своими производными первого порядка векторное поле $Q(q)$ всегда можно разложить на потенциальное и циркуляционное поля:

$$Q(q) = -\text{grad } \Pi + R(q),$$

где поле $R(q)$ и потенциал $-\Pi$ подлежат определению.

Заметим здесь же, что линейное циркуляционное поле $R(q) = Pq$, где P — кососимметричная матрица, будет одновременно и соленоидальным полем, т. е. полем, для которого дивергенция равна нулю:

$$\text{div } R = \sum_k \frac{\partial R_k}{\partial q_k} = 0$$

(так как в силу косои симметрии матрицы P проекция R_k вектора R не содержит координаты q_k и, следовательно, все $\partial R_k / \partial q_k \equiv 0$). В общем нелинейном случае циркуляционное поле не является соленоидальным. Так, если $R_1 = q_1 q_2^3$, $R_2 = -q_1^3 q_2^2$, то дивергенция вектора R

$$\text{div } R = \frac{\partial R_1}{\partial q_1} + \frac{\partial R_2}{\partial q_2} = q_2^3 - 2q_1^2 q_2 \neq 0,$$

т. е. циркуляционное поле R , для которого $R \cdot q = R_1 q_1 + R_2 q_2 \equiv \equiv 0$, не является соленоидальным.

Полезно отметить, что практически одновременно, независимо друг от друга и в совершенно различных формах, аналогичные результаты были получены в разных странах при разборе термодинамических задач [44а, 53а]. Автор настоящей книги не уверен, что эта теорема не было доказана еще в прошлом веке.

или, учитывая равенство (6.15),

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{q} = - (\text{grad } \Pi) \cdot \mathbf{q}. \quad (6.18)$$

Левая часть этого равенства представляет известную функцию координат q_1, \dots, q_s (так как сила \mathbf{Q} задана). Обозначим эту функцию через H :

$$H(q_1, \dots, q_s) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q} = \sum_{k=1}^s Q_k q_k. \quad (6.19)$$

Если функция H тождественно равна нулю, то, согласно равенству (6.15), сила \mathbf{Q} будет неконсервативной позиционной силой и задача разложения силы \mathbf{Q} будет полностью решена при $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$ и $\Pi = 0$.

Рассмотрим общий случай, когда H и, следовательно, потенциальная энергия не равны нулю. Запишем равенство (6.18) в скалярной форме, учтя при этом равенство (6.19)

$$q_1 \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} + \dots + q_s \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = -H. \quad (6.20)$$

В этом равенстве функция H известна, а функция Π неизвестна. Поэтому равенство (6.20) можно рассматривать как линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных относительно потенциальной энергии Π . Как известно, решение уравнения (6.20) сводится к решению следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq_1}{q_1} = \dots = \frac{dq_{s-1}}{q_{s-1}} = \frac{dq_s}{q_s} = \frac{d\Pi}{-H}.$$

Из первых $s - 1$ уравнений найдем

$$q_1 = C_1 q_s, \dots, q_{s-1} = C_{s-1} q_s, \quad (6.21)$$

где C_1, \dots, C_{s-1} — произвольные постоянные интегрирования.

Последнее уравнение

$$\frac{dq_s}{q_s} = \frac{d\Pi}{-H}$$

приводится к виду

$$d\Pi = - \frac{H(q_1, \dots, q_s)}{q_s} dq_s. \quad (6.22)$$

Заменим в функции H переменные q_1, \dots, q_{s-1} на их значения из (6.21). Тогда эта функция будет зависеть

только от одной переменной q_s и постоянных C_1, \dots, C_{s-1} . Интегрируя обе части равенства (6.22), найдем

$$\Pi = - \int \frac{H(C_1 q_s, \dots, C_{s-1} q_s, q_s)}{q_s} dq_s + C_s,$$

где C_s — новая постоянная интегрирования.

Общее решение уравнения в частных производных (6.20) можно привести теперь к следующей форме:

$$\Pi = - \int \frac{H(C_1 q_s, \dots, C_{s-1} q_s, q_s)}{q_s} dq_s + \Psi \left(\frac{q_1}{q_s}, \dots, \frac{q_{s-1}}{q_s} \right),$$

где Ψ — произвольная функция.

Учтем теперь, что при $H = 0$ потенциальная энергия равна нулю (см. примечание к формуле (6.19)). Поэтому, положив $\Psi = 0$, получим окончательное выражение для потенциальной энергии

$$\Pi = - \int \frac{H(C_1 q_s, \dots, C_{s-1} q_s, q_s)}{q_s} dq_s \quad (6.23)$$

(конечно, после вычисления интеграла входящие в него постоянные интегрирования C_1, \dots, C_{s-1} нужно заменить на их значения из (6.21)).

После того как будет найдена потенциальная энергия Π неконсервативная позиционная сила R определится из равенства (6.16)

$$R = Q + \text{grad } \Pi. \quad (6.24)$$

Составляющие потенциальной силы $K = -\text{grad} \Pi$ определяются равенствами (6.11)

$$K_1 = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \dots, K_s = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_s}. \quad (6.25)$$

Составляющие неконсервативной позиционной силы R определяются из равенства (6.24)

$$R_1 = Q_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \dots, R_s = Q_s + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s}. \quad (6.26)$$

Заметим, что первые формулы (6.5) для линейной позиционной силы $Q = -C_1 q$ можно, конечно, получить из равенств (6.25) и (6.26), но это значительно более сложный и трудоемкий путь, к которому следует прибегать только для нелинейных систем.

Пример. Даны обобщенные позиционные силы

$$Q_1 = q_1 + q_1 q_2^3, \quad Q_2 = q_1^2 q_2^2 + 2q_2^5. \quad (6.27)$$

Требуется разложить эти силы на потенциальные и неконсервативные позиционные составляющие.

Составим по формуле (6.19) функцию

$$H = Q_1 q_1 + Q_2 q_2 = q_1^4 + 2q_1^2 q_2^3 + 2q_2^6.$$

Интеграл (6.21) в нашем случае будет

$$q_1 = C q_2.$$

Внесем это значение для q_1 в функцию H :

$$H = C^4 q_2^4 + 2C^2 q_2^5 + 2q_2^6.$$

Вычислим теперь по формуле (6.23) потенциальную энергию. Имеем

$$\Pi = - \int^q \frac{C^4 q_2^4 + 2C^2 q_2^5 + 2q_2^6}{q_2} dq_2,$$

или

$$\Pi = - \frac{1}{4} C^4 q_2^4 - \frac{2}{5} C^2 q_2^5 - \frac{1}{3} q_2^6.$$

Заменяя постоянную C на ее значение q_1/q_2 , получим окончательное выражение для потенциальной энергии

$$\Pi = - \left(\frac{1}{4} q_1^4 + \frac{2}{5} q_1^2 q_2^3 + \frac{1}{3} q_2^6 \right). \quad (6.28)$$

Заметим, что при $q_1 = q_2 = 0$ потенциальная энергия имеет максимум (так как для переменных q_1^2 и q_2^3 выполнен критерий Сильвестра (2.10): $\Delta_1 = -1/4 < 0$, $\Delta_2 = 13/300 > 0$).

Составляющие потенциальной силы $K = -\text{grad } \Pi$ и неконсервативной позиционной силы R найдем по формулам (6.25) и (6.26):

$$K_1 = q_1^3 + \frac{4}{5} q_1 q_2^3, \quad K_2 = \frac{6}{5} q_1^2 q_2^2 + 2q_2^5, \quad (6.29)$$

$$R_1 = \frac{1}{5} q_1 q_2^3, \quad R_2 = - \frac{1}{5} q_1^2 q_2^2. \quad (6.30)$$

Легко проверить, что силы R_1 и R_2 удовлетворяют условию (6.15).

Рассмотрим теперь силу $Q(\dot{q})$, зависящую от скорости \dot{q} изображающей точки M . Если выделить из этой силы гироскопическую составляющую Γ (силу, не производящую работу), то в соответствии с определениями оставшаяся часть будет равна диссипативной силе с положительным или отрицательным сопротивлением. Таким образом,

имеем

$$Q(\dot{q}) = D(\dot{q}) + \Gamma(\dot{q}). \quad (6.31)$$

Покажем сейчас, что силу сопротивления $D(\dot{q})$ можно представить как градиент некоторой скалярной функции $F(\dot{q})$:

$$D = -\text{grad } F. \quad (6.32)$$

В этом равенстве $\text{grad } F$ определяется в пространстве скоростей $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$ так, что

$$D_k = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \quad (k=1, \dots, s), \quad (6.33)$$

причем должны выполняться равенства

$$\frac{\partial D_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial D_j}{\partial \dot{q}_k} \quad (k, j=1, \dots, s). \quad (6.34)$$

Для доказательства сделанного утверждения достаточно заметить, что в соответствии с определениями гироскопическая сила Γ в пространстве скоростей $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$ и неконсервативная позиционная сила R в пространстве координат (q_1, \dots, q_s) удовлетворяют одинаковым условиям ортогональности (6.13) и (6.15). Поэтому, повторяя почти дословно обоснование возможности разделения позиционных сил, можно доказать следующую теорему.

Теорема. Любую непрерывную вместе со своими производными первого порядка силу $Q(\dot{q})$, зависящую только от скоростей системы, можно представить суммой двух сил

$$Q(\dot{q}) = -\text{grad } F + \Gamma, \quad (6.35)$$

где Γ — гироскопическая сила, а F — некоторая скалярная функция скоростей \dot{q}_k .

Сравнив равенства (6.35) и (6.31), получим (6.32). Функцию $F(\dot{q})$ будем называть *функцией Релея*¹⁾. Заметим, что функция $-F(\dot{q})$ является потенциалом поля сил сопротивления.

¹⁾ Для ливейных сил положительного сопротивления диссипативная функция F введена в 1873 г. Релеем. Определение полной и частичной диссипации для таких сил дано Четаевым. Здесь приведены обобщения этих понятий на произвольные силы сопротивления [38].

Учитывая равенства (6.32) и (6.33), вычислим мощность силы сопротивления

$$N(\dot{q}) = \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{q}} = - \operatorname{grad} F \cdot \dot{\mathbf{q}} = - \sum_{k=1}^s \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k. \quad (6.36)$$

Если составляющие D_k силы сопротивления \mathbf{D} однородны относительно скоростей и степень их однородности равна m , то функция F также однородна, причем степень ее однородности будет, очевидно, $m + 1$. В этом случае, пользуясь равенством (6.36), по известной теореме Эйлера об однородных функциях получим

$$N = - (m + 1) F. \quad (6.37)$$

В частности, для линейных сил сопротивления $N = -2F$.

Из равенства (6.37) видно, что однородным силам положительного сопротивления с полной диссипацией отвечает определенно-положительная диссипативная функция F , а при неполной (частичной) диссипации — просто положительная функция F .

В дальнейшем, если не будет специальной оговорки, под силой сопротивления \mathbf{D} будем понимать силу положительного сопротивления (диссипативную силу). В тех редких случаях, когда будут рассматриваться силы отрицательного сопротивления, они будут называться *ускоряющими* силами.

До сих пор мы считали, что гироскопические силы $\mathbf{\Gamma}$ и силы сопротивления \mathbf{D} зависят только от скорости $\dot{\mathbf{q}}$. На практике эти силы очень часто зависят также от положения системы, т. е. от радиуса-вектора \mathbf{q} изображающей точки M :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Все определения для этих сил сохраняются без всякого изменения, если только радиус-вектор \mathbf{q} точки M рассматривать как параметр. В частности, будем считать, что силы $\mathbf{\Gamma}$ и \mathbf{D} обращаются в нуль при $\dot{\mathbf{q}} = 0$

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}, 0) = 0, \quad \mathbf{D}(\mathbf{q}, 0) = 0, \quad (6.38)$$

причем предполагается, что при $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$ эти силы не равны нулю при любых значениях \mathbf{q} , расположенных вблизи точки $\mathbf{q} = 0$.

Мощность N силы D будет теперь зависеть не только от скорости \dot{q} , но и от q

$$N(q, \dot{q}) = D(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}. \quad (6.39)$$

Определение полной и частичной диссипации остается почти без изменения: диссипация называется полной (частичной), если мощность $N(q, \dot{q})$ силы D является определенно-отрицательной (отрицательной) функцией скорости \dot{q} при всех значениях q , расположенных вблизи точки $q = 0$.

Пример 1. Сила Γ с линейными относительно скоростей составляющими

$$\Gamma_1 = \cos \beta \dot{\beta}, \quad \Gamma_2 = -\cos \beta \dot{\alpha}$$

гироскопическая, так как ее мощность

$$N = \Gamma_1 \dot{\alpha} + \Gamma_2 \dot{\beta} = \cos \beta \dot{\beta} \dot{\alpha} + (-\cos \beta \dot{\alpha}) \dot{\beta}$$

тождественно равна нулю.

Пример 2. Сила Γ с нелинейными относительно скоростей составляющими

$$\Gamma_1 = (B - C) \dot{x}_2 \dot{x}_3, \quad \Gamma_2 = (C - A) \dot{x}_3 \dot{x}_1, \quad \Gamma_3 = (A - B) \dot{x}_1 \dot{x}_2,$$

где A , B и C — произвольные функции координат x_1 , x_2 , x_3 и скоростей \dot{x}_1 , \dot{x}_2 , \dot{x}_3 , гироскопическая, так как ее мощность

$$N = \Gamma_1 \dot{x}_1 + \Gamma_2 \dot{x}_2 + \Gamma_3 \dot{x}_3$$

тождественно равна нулю.

Пример 3. Сила D , составляющие которой определяются равенствами ¹⁾

$$D_1 = -[1 + \cos^2(q_1 + q_2)] \dot{q}_1^2 \operatorname{sign} \dot{q}_1, \quad D_2 = -(\dot{q}_2 + \dot{q}_2^3),$$

является силой положительного сопротивления с полной диссипацией. Действительно, мощность этой силы

$$N = D_1 \dot{q}_1 + D_2 \dot{q}_2 = -\{[1 + \cos^2(q_1 + q_2)] \dot{q}_1^2 |\dot{q}_1| + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_2^4\}$$

представляет определенно-отрицательную функцию скоростей \dot{q}_1 , \dot{q}_2 при любых q_1 и q_2 (при вычислении N учтено, что $\dot{q}_1 \operatorname{sign} \dot{q}_1 = |\dot{q}_1|$). Функция Релея для данных сил имеет вид

$$F = \frac{1}{3} [1 + \cos^2(q_1 + q_2)] |\dot{q}_1|^3 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^3 + \frac{1}{4} \dot{q}_2^4.$$

Эта функция удовлетворяет равенствам (6.33), так как

$$\frac{d}{d\dot{q}_1} |\dot{q}_1|^3 = 3 |\dot{q}_1|^2 \frac{d}{d\dot{q}_1} |\dot{q}_1| = 3 \dot{q}_1^2 \operatorname{sign} \dot{q}_1.$$

Пример 4. Методом, изложенным на с. 160—161, силы

$$Q_1 = -\dot{q}_1^3 \dot{q}_2^2, \quad Q_2 = -\dot{q}_1^2 \dot{q}_2^3$$

¹⁾ Символ $\operatorname{sign} x$ означает знак x .

можно разложить на гироскопические и диссипативные составляющие:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{3} (i_1^4 i_2^4 - i_1^3 i_2^3), & \Gamma_2 &= \frac{1}{3} (i_1^4 i_2^2 - i_1^2 i_2^3), \\ D_1 &= -\frac{2}{3} i_1^3 i_2^2 - \frac{1}{3} i_1^4 i_2^4, & D_2 &= -\frac{2}{3} i_1^2 i_2^3 - \frac{1}{3} i_1^4 i_2^2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что гироскопические силы Γ_1 и Γ_2 удовлетворяют условию (6.13), а силы D_1 и D_2 — условию (6.34). Функция F в данном примере равна

$$F = \frac{1}{6} i_1^4 i_2^2 + \frac{1}{6} i_1^2 i_2^4.$$

Так как эта функция определено-положительна, то имеется полная диссипация.

§ 6.3. Постановка задачи

Будем считать, что уравнения возмущенного движения относительно величин q и ζ приведены к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + D_k + \Gamma_k + R_k, \quad (6.4)$$

$$\frac{dq_k}{dt} = \dot{\zeta}_k \quad (k = 1, \dots, s).$$

В этих уравнениях T — определено-положительная квадратичная форма скоростей ζ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s a_{kj} \dot{\zeta}_k \dot{\zeta}_j, \quad (6.41)$$

где $a_{kj} = a_{jk}$ — функции q . Предполагается, что при $q = 0$ потенциальная энергия Π равна нулю. Кроме того, предполагается, что при $q = 0$ обращаются в нуль потенциальные и неконсервативные позиционные силы, а при $\dot{q} = 0$ обращаются в нуль диссипативные и гироскопические силы.

Независимо от способа получения уравнений возмущенного движения (6.40) функцию T можно рассматривать как кинетическую энергию приведенной системы, переменные q_k и ζ_k — как обобщенные координаты и скорости, а члены, стоящие в правых частях этих уравнений, — как потенциальные, диссипативные, гироскопические и неконсервативные позиционные силы соответственно. Относительно сил предполагается только, что

они удовлетворяют сделанным в § 6.2 определениям и условиям существования и единственности решения дифференциальных уравнений (6.40). Никаких других ограничений на силы не налагается — они могут быть линейными, существенно нелинейными (их разложения по степеням q и ζ могут начинаться с членов любого порядка), наконец, они могут быть неаналитическими функциями координат q и скоростей $\dot{\zeta}$.

К уравнениям возмущенного движения (6.40) приводятся все задачи на исследование устойчивости равновесия механических систем с голономными и стационарными связями и многие задачи на исследование устойчивости установившихся и стационарных движений механических, электрических и электромеханических систем. Не вдаваясь в анализ физической природы координат q и рассматриваемого явления, будем говорить, что значения $q = 0$ и $\dot{\zeta} = 0$ отвечает равновесие системы, а уравнения (6.40) описывают возмущенное движение около положения равновесия. Поэтому, говоря об устойчивости равновесия системы, нужно помнить условный характер этого выражения — возможно, что на самом деле речь идет об устойчивости установившегося движения электромеханической системы. Точно так же нужно помнить условный характер употребляемого здесь слова «сила». В действительности может оказаться, что члены уравнений (6.40), которые мы трактуем как силы, не представляют реальные силы, а получились в результате некоторых математических преобразований. Несмотря на это, все члены правых частей уравнений (6.40) мы будем называть силами, действующими на систему.

Задача ставится следующим образом: как определить характер устойчивости равновесия системы по структуре действующих сил? Примером решения такой задачи может служить теорема Лагранжа и ее обращение, на основании которой вопрос об устойчивости равновесия консервативной системы решается исследованием одной потенциальной энергии без привлечения анализа левых частей уравнений (см. § 3.1 и 3.2).

Кроме уравнений возмущенного движения в форме (6.40), будем рассматривать случай, когда разложения всех сил по степеням q и $\dot{\zeta}$ содержат линейные члены. Для таких систем уравнения возмущенного движения приводятся к виду

$$A\ddot{q} + B_1\dot{q} + C_1q = Q^{(2)}. \quad (6.42)$$

В этом векторно-матричном уравнении A — определенно-положительная симметричная матрица, B_1 и C_1 — некоторые квадратные матрицы (элементы всех матриц постоянные числа); составляющие вектора $Q^{(2)}$ содержат координаты q_k и скорости \dot{q}_k в степени выше первой.

Воспользуемся формулами (6.4) и (6.5) и разобьем матрицы B_1 и C_1 на симметричные и кососимметричные части. Тогда получим

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Gq + Cq + Pq = Q^{(2)}. \quad (6.43)$$

Кинетическая энергия этой системы определяется равенством (6.41), в котором коэффициенты a_{kj} следует считать постоянными числами. Потенциальные, неконсервативные позиционные, гироскопические и диссипативные силы определяются равенствами (6.7), потенциальная энергия — равенством (6.8), диссипативная функция Релея — равенством (6.9).

Уравнение возмущенного движения (6.43) можно представить в двух других формах. Для этого перейдем к новому переменному вектору z по формуле

$$q = \Lambda z,$$

где Λ — ортогональная матрица преобразования. После подстановки в уравнение (6.43) получим

$$A\Lambda\ddot{z} + B\Lambda\dot{z} + G\Lambda z + C\Lambda z + P\Lambda z = Z_1.$$

Умножим слева обе части этого уравнения на транспонированную матрицу Λ'

$$\Lambda' A \Lambda \ddot{z} + \Lambda' B \Lambda \dot{z} + \Lambda' G \Lambda z + \Lambda' C \Lambda z + \Lambda' P \Lambda z = Z, \quad (6.44)$$

где $Z = \Lambda' Z_1$ — вектор, составляющие которого содержат z_k и \dot{z}_k в степени выше первой. Учтем теперь, что матрицы A и C симметричны и, кроме того, матрица A определенно-положительна. На основании второй теоремы § 5.3 существует такая неособая ортогональная матрица Λ , для которой будут справедливы равенства (5.42). Пусть Λ — такая матрица. Тогда

$$\Lambda' A \Lambda = E, \quad \Lambda' C \Lambda = C_0,$$

где E — единичная, а C_0 — диагональная матрицы.

Легко видеть, что матрица $\Lambda' B \Lambda$ симметричная, а матрицы $\Lambda' G \Lambda$ и $\Lambda' P \Lambda$ — кососимметричные. Действительно, на основании правила транспонирования произведения

матриц (5.13) имеем

$$(\Lambda' B \Lambda)' = (B \Lambda)' (\Lambda')' = \Lambda' B' (\Lambda')'.$$

Из самого определения следует, что дважды транспонированная матрица равна исходной матрице, т. е. $(\Lambda')' = \Lambda$. Кроме того, матрица B симметричная и, следовательно, $B' = B$ (см. (5.15)). Таким образом,

$$(\Lambda' B \Lambda)' = \Lambda' B \Lambda,$$

что на основании той же формулы (5.15) служит доказательством симметричности матрицы $\Lambda' B \Lambda$.

Если вместо симметричной матрицы B взять кососимметричную матрицу G (или P), то будем иметь

$$(\Lambda' G \Lambda)' = (G \Lambda)' (\Lambda')' = \Lambda' G' \Lambda$$

или, учитывая, что матрица G кососимметричная и для нее справедлива формула (5.16), на основании которой $G' = -G$,

$$(\Lambda' G \Lambda)' = -\Lambda' G \Lambda.$$

Согласно той же формуле (5.16) заключаем, что матрица $\Lambda' G \Lambda$ кососимметричная. Аналогичный вывод справедлив, конечно, и для матрицы $\Lambda' P \Lambda$.

Учитывая сказанное и принимая во внимание, что $E\ddot{z} = \ddot{z}$, уравнение (6.44) можно записать следующим образом:

$$\ddot{z} + B\dot{z} + G\dot{z} + C_0 z + Pz = Z, \quad (6.45)$$

где для простоты симметричная матрица $\Lambda' B \Lambda$ и кососимметричные матрицы $\Lambda' G \Lambda$ и $\Lambda' P \Lambda$ обозначены прежними буквами B , G и P соответственно.

До сих пор мы применяли теорему § 5.3 к матрицам A и C уравнения (6.43). Но эту же теорему можно применить для матриц A и B . Тогда получим еще одну форму уравнения возмущенного движения

$$\ddot{z} + B_0 \dot{z} + G\dot{z} + Cz + Pz = Z. \quad (6.46)$$

В уравнениях (6.45) и (6.46) C_0 и B_0 — диагональные матрицы с вещественными элементами (см. вторую теорему § 5.3):

$$C_0 = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_s \end{vmatrix}, \quad B_0 = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_s \end{vmatrix}. \quad (6.47)$$

Таким образом, с помощью линейного ортогонального преобразования $q = \Lambda z$ уравнение (6.43) можно привести к одной из двух форм (6.45) или (6.46), причем потенциальные, диссипативные, гироскопические и неконсервативные позиционные силы преобразуются в силы той же структуры. Очевидно, что из устойчивости (неустойчивости) относительно координат z и скоростей \dot{z} следует устойчивость (неустойчивость) относительно координат q и скоростей \dot{q} и наоборот. Поэтому нас не будет интересовать само преобразование $q = \Lambda z$, приводящее уравнение (6.43) к одному из уравнений (6.45) или (6.46). Достаточно знать, что такое преобразование существует.

Рассмотрим в уравнении (6.46) силу сопротивления $-B_0 \dot{z}$ более подробно. Если коэффициент $b_k > 0$, то составляющая этой силы $-b_k \dot{z}_k$ будет замедлять движение, если же $b_k < 0$, то эта составляющая будет ускорять движение. Будем говорить, что *диссипативные силы доминируют над ускоряющими*, если сумма элементов b_k матрицы B_0 положительна; если же $\sum b_k < 0$, то *ускоряющие силы доминируют над диссипативными*. При отсутствии ускоряющих сил среди элементов b_k матрицы B_0 нет отрицательных (но могут быть элементы, равные нулю), а при полной диссипации все элементы b_k положительны.

Так как след матрицы и ее определитель являются инвариантами при ортогональном преобразовании, то будем иметь следующие тождества:

$$\text{Sp } B_0 = \sum_{k=1}^s b_k = \sum_{k=1}^s b_{kk} = \text{Sp } B = \text{Sp } B_1, \quad (6.48)$$

$$c_1 \dots c_s = \det C, \quad \det (C + P) = \det C_1. \quad (6.49)$$

Из первого тождества следует, что вопрос о доминировании диссипативных и ускоряющих сил решается исходной системой (6.42).

Кроме системы (6.43), содержащей линейные члены, будем рассматривать частично линеаризованные системы, когда некоторые силы могут не содержать линейных членов. Дифференциальное уравнение таких систем запишем в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}(A\dot{q}) = -\text{grad } \Pi - B\dot{q} + \Gamma(q, \dot{q}) + R(q). \quad (6.50)$$

Здесь $A(q)$ — определенно-положительная матрица, элементы которой зависят от координат системы q , B —

постоянная симметричная матрица, а все остальные члены, стоящие в правой части уравнения, представляют соответственно произвольные потенциальные, гироскопические и неконсервативные позиционные силы, удовлетворяющие самым общим определениям.

§ 6.4. Коэффициенты устойчивости

Пусть на систему действуют только потенциальные силы, содержащие линейную часть, а все остальные силы отсутствуют ($D = \Gamma = R = 0$). Тогда, пользуясь уравнением (6.45), получим

$$\ddot{z} + C_0 z = Z.$$

Это векторно-матричное уравнение эквивалентно s скалярным уравнениям (напомним, что C_0 — диагональная матрица)

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + c_1 z_1 &= Z_1, \\ &\dots \\ \ddot{z}_s + c_s z_s &= Z_s, \end{aligned} \tag{6.51}$$

где функции Z_k содержат координаты z_j и скорости \dot{z}_j в степени выше первой.

Линейная часть каждого уравнения (6.51) содержит только одну координату (такие координаты называются *нормальными*). Характеристические числа k -го уравнения этой системы равны $\pm \sqrt{-c_k}$. Отсюда следует, что если какое-нибудь число c_k положительно, то при отсутствии соответствующего нелинейного члена Z_k движение в нормальной координате z_k будет устойчиво. Если же какое-нибудь число $c_k < 0$, то движение в этой нормальной координате неустойчиво независимо от членов высшего порядка (так как из двух характеристических чисел $\pm \sqrt{-c_k}$ одно будет положительно — см. теорему Ляпунова о неустойчивости движения по уравнениям первого приближения § 4.3). В связи с этим числа c_k называются *коэффициентами устойчивости* системы, а число отрицательных чисел c_k — *степенью неустойчивости* (эти определения принадлежат Пуанкаре). В дальнейшем будет иметь значение не число неустойчивых коэффициентов c_k , а его четность. Пользуясь первым равенством (6.49)

$$c_1 \dots c_s = \det C,$$

можно определить четность степени неустойчивости системы, не прибегая к непосредственному переходу к нормальным координатам (такой переход представляет большой интерес в теоретических исследованиях, но осуществить его не менее сложно, чем решить исходную систему). Действительно, если число отрицательных коэффициентов c_k четное, то произведение $c_1 \dots c_n$ положительно (предполагается, что среди коэффициентов устойчивости нет нулевых). Но тогда из последнего равенства следует, что $\det C > 0$; если же число отрицательных c_k нечетное, то произведение $c_1 \dots c_n$ отрицательно и, следовательно, $\det C < 0$; обратные утверждения, очевидно, тоже справедливы. Таким образом, имеем простое правило; *если определитель матрицы C потенциальных сил исходных уравнений возмущенного движения положителен, то степень неустойчивости системы четная, если же $\det C < 0$, то степень неустойчивости системы нечетная.*

Для иллюстрации этого правила рассмотрим два простых примера.

1. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + 5q_1 + 2q_2 &= 0, \\ \ddot{q}_1 + 3\ddot{q}_2 + 2q_1 - q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Система потенциальная, так как матрица коэффициентов сил, линейно зависящих от координат, симметричная:

$$C = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $\det C = -9$ отрицателен. Поэтому, не приводя уравнения к нормальным координатам, можно утверждать, что система имеет нечетную степень неустойчивости. Так как число координат равно двум, то имеются одна неустойчивая и одна устойчивая координаты.

2. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\ddot{q}_1 + q_1 + 2q_3 = 0, \quad \ddot{q}_2 - 3q_2 + q_3 = 0, \quad \ddot{q}_3 + 2q_1 + q_2 - q_3 = 0.$$

Матрица коэффициентов сил, линейно зависящих от координат,

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

симметрична. Поэтому система потенциальна. Определитель матрицы $\det C = 14$ положителен. Не приводя уравнения к нормальным координатам, можно утверждать, что если система имеет неустойчивые координаты, то число их четное. Легко установить, что неустойчивые координаты имеются и число их равно двум. Действительно, составим главные диагональные миноры матрицы C :

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 < 0, \quad \Delta_3 = \det C = 14 > 0.$$

Так как один из определителей Сильвестра (2.8) для матрицы коэффициентов потенциальной энергии отрицателен, то система неустойчива (см. § 3.1), и, следовательно, должны быть неустойчивые координаты. Но число их должно быть четным, а всего координат три. Поэтому система имеет две неустойчивые и одну устойчивую координаты.

§ 6.5. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия потенциальной системы

В реальных условиях на потенциальную систему налагаются диссипативные силы, возникающие за счет сопротивления среды (омического сопротивления) или в результате действия специально установленных устройств. Кроме того, очень часто встречаются системы, на которые действуют не только потенциальные и диссипативные, но и гироскопические силы.

Предположим сначала, что невозмущенное движение $z = 0$, $\dot{z} = 0$ под действием одних потенциальных сил неустойчиво. Естественно возникает вопрос: нельзя ли стабилизировать неустойчивое движение, присоединив к потенциальным силам гироскопические силы? Простые примеры показывают, что в некоторых случаях это осуществимо. Действительно, потенциальная система

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + c_1 z_1 &= 0, \\ \ddot{z}_2 + c_2 z_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.52)$$

при отрицательных c_1 и c_2 неустойчива. Присоединим к системе гироскопические силы $-g\dot{z}_2$ и $g\dot{z}_1$ соответственно. Получим

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + g\dot{z}_2 + c_1 z_1 &= 0, \\ \ddot{z}_2 - g\dot{z}_1 + c_2 z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Составим характеристическое уравнение этой системы

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_1 & g\lambda \\ -g\lambda & \lambda^2 + c_2 \end{vmatrix} = \lambda^4 + (g^2 + c_1 + c_2)\lambda^2 + c_1 c_2 = 0.$$

Так как в этом уравнении λ содержится только в четных степенях, то каждому корню λ будет отвечать корень $-\lambda$. Поэтому, если вещественная часть хотя бы одного корня не равна нулю, то найдется корень, вещественная часть которого положительна. Из этого следует, что устойчивость наступит только в том случае, если все корни характеристического уравнения будут чисто мнимыми числами, а корни относительно λ^2 — отрицательными веще-

ственными числами. Для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты характеристического уравнения удовлетворяли следующим условиям:

$$c_1 c_2 > 0, \quad g^2 + c_1 + c_2 > 0, \quad (g^2 + c_1 + c_2)^2 - 4c_1 c_2 > 0.$$

Эти три неравенства сводятся к одному условию (напомним, что по предположению $c_1 < 0$ и $c_2 < 0$)

$$|g| > \sqrt{-c_1} + \sqrt{-c_2}. \quad (6.54)$$

Таким образом, если коэффициент g удовлетворяет этому условию, то неустойчивая потенциальная система (6.52) будет стабилизирована добавлением гироскопических сил $-gz_2$ и gz_1 .

Вслед за этим возникает другой вопрос: всегда ли можно стабилизировать неустойчивую потенциальную систему гироскопическими силами? Одно из необходимых условий гироскопической стабилизации определяет следующая теорема (достаточные условия установлены в работах [38, 49]).

Первая теорема Томсона — Тета — Четаева. *Если неустойчивость изолированного положения равновесия системы при одних потенциальных силах имеет нечетную степень, то гироскопическая стабилизация равновесия невозможна при любых членах, содержащих координаты и скорости в степени выше первой¹⁾.*

Доказательство. Пусть потенциальная система

$$\ddot{z} + C_0 z = Z \quad (6.55)$$

имеет нечетную степень неустойчивости. Присоединив к системе произвольные гироскопические силы $-G\dot{z}$, получим

$$\ddot{z} + G\dot{z} + C_0 z = Z.$$

Составим характеристическое уравнение, учитывая, что C_0 — диагональная, а G — кососимметричная матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^2 + c_1 & g_{12}\lambda & \dots & g_{1s}\lambda \\ g_{21}\lambda & \lambda^2 + c_2 & \dots & g_{2s}\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{s1}\lambda & g_{s2}\lambda & \dots & \lambda^2 + c_s \end{vmatrix} = 0$$

¹⁾ Во всех теоремах этой главы при отсутствии специальной оговорки рассматривается устойчивость относительно координат и скоростей, причем за невозмущенное движение принимается $z = 0$, $\dot{z} = 0$.

или, раскрывая определитель и группируя члены по степеням λ

$$\Delta = \lambda^{2s} + \dots + a_{2s} = 0.$$

Свободный член этого уравнения равен, очевидно, произведению $c_1 \dots c_s$ (чтобы найти его, достаточно в определителе Δ положить $\lambda = 0$):

$$a_{2s} = c_1 \dots c_s.$$

Из условий теоремы следует, что $a_{2s} < 0$. Действительно, число отрицательных коэффициентов устойчивости c_k нечетное и среди них нет нулевых (так как положение равновесия изолированное). Поэтому среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью (см. пояснение к формулам (4.23)). Доказательство теоремы следует теперь из теоремы Ляпунова о неустойчивости движения по уравнениям первого приближения (см. § 4.3), и того обстоятельства, что свободный член a_{2s} характеристического уравнения не зависит от гироскопических сил.

Прежде чем перейти к исследованию влияния гироскопических и диссипативных сил на равновесие устойчивой потенциальной системы, остановимся на одной формуле, которая нам понадобится в дальнейшем. Пусть в системе общего вида (6.40) отсутствуют неконсервативные позиционные силы ($R_k = 0$)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + D_k + \Gamma_k. \quad (6.56)$$

Умножим каждое уравнение на \dot{q}_k и полученные произведения сложим. Тогда, учитывая равенство (6.13), получим после несложных преобразований

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) = N, \quad (6.57)$$

где $N = \sum D_k \dot{q}_k$ — мощность сил сопротивления¹⁾. Если силы сопротивления однородны относительно скоростей, то, согласно формуле (6.37), будем иметь

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) = -(m + 1)F. \quad (6.58)$$

Заметим, что для линейных сил сопротивлений $m = 1$ и правая часть этих равенств будет равна $-2F$ (именно

¹⁾ Вывод можно найти в любом достаточно полном курсе теоретической механики (см., например, [12]).

для этого случая формула (6.57) приводится в курсах теоретической механики).

Вторая теорема Томсона — Тета — Четаева. *Если изолированное положение равновесия системы устойчиво при одних потенциальных силах, то при добавлении произвольных гироскопических и диссипативных сил устойчивость равновесия сохранится.*

Доказательство. Воспользуемся формулой (6.57). Так как мощность N диссипативных сил не положительна, то будем иметь

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) \leq 0.$$

Учтем теперь, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия Π имеет минимум (см. замечания в конце § 3.2). Поэтому функция $T + \Pi$ будет определено-положительной относительно совокупности координат q_k и скоростей $\dot{\zeta}_k$ (см. доказательство теоремы Лагранжа § 3.1). Доказательство теоремы следует теперь из теоремы Ляпунова об устойчивости движения (§ 2.2).

Третья теорема Томсона — Тета — Четаева. *Если изолированное положение равновесия системы устойчиво при одних потенциальных силах, то оно становится асимптотически устойчивым при добавлении произвольных гироскопических сил и сил сопротивления с полной диссипацией.*

Доказательство. Функция $V(q, \dot{\zeta}) = T + \Pi$ определено-положительна относительно совокупности координат q_k и скоростей $\dot{\zeta}_k$ (см. теорему 2). Ее полная производная по времени в силу уравнений возмущенного движения определяется равенством (6.57)

$$\frac{dV}{dt} = N(q, \dot{\zeta}).$$

На многообразии K ($q \neq 0, \dot{q} = 0$) производная \dot{V} равна нулю, а вне этого множества она отрицательна (по условию теоремы диссипация полная — см. равенство (6.39)). Покажем, что многообразию K не содержит целых траекторий системы (6.56). Действительно, при $\dot{q} = 0$ кинетическая энергия T , силы сопротивления $D(q, \dot{\zeta})$ и гироскопические силы $\Gamma(q, \dot{\zeta})$ обращаются в нуль (см. равенства (6.41) и (6.38)). Следовательно, при $\dot{q} = 0$ и $q' \neq 0$ уравнения (6.56) принимают вид

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \right)_{q \neq 0} = 0 \quad (k = 1, \dots, s),$$

что невозможно при изолированном положении равновесия потенциальной системы ¹⁾). Доказательство теоремы следует теперь из теоремы Н. Н. Красовского об асимптотической устойчивости (§ 2.3).

В начале этого параграфа было показано, что в некоторых случаях неустойчивую потенциальную систему можно стабилизировать гироскопическими силами. При доказательстве мы не учитывали диссипативные силы. Рассмотрим сейчас, какое значение имеют эти силы для гироскопической стабилизации.

Четвертая теорема Томсона — Тета — Четаева. *Если в окрестности изолированного неустойчивого положения равновесия консервативной системы потенциальная энергия может принимать отрицательные значения, то при добавлении сил сопротивления с полной диссипацией и произвольных гироскопических сил равновесие останется неустойчивым.*

Доказательство. Запишем равенство (6.57) в следующей форме:

$$\frac{dV_1}{dt} = -N, \quad V_1 = -(T + \Pi).$$

Рассмотрим прежнее многообразие K ($q \neq 0, \dot{q} = 0$). На нем $\dot{V}_1 = 0$, а вне его $\dot{V}_1 > 0$ (диссипация полная и, следовательно, $N < 0$ при $\dot{q} \neq 0$). По условию теоремы в окрестности нуля существуют точки, в которых $\Pi < 0$. В этих точках при $\dot{q} = 0$ функция V_1 принимает положительные значения. Кроме того, многообразие K не содержит целых траекторий системы (6.56) (по тем же соображениям, что и в предшествующей теореме). Доказательство теоремы следует теперь из теоремы Н. Н. Красовского о неустойчивости движения ²⁾).

¹⁾ В положении равновесия $q = 0$ потенциальной системы должны выполняться равенства (3.2)

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \right)_{q=0} = 0 \quad (k = 1, \dots, s).$$

Если частные производные равны нулю в окрестности положения равновесия при $q \neq 0$, то равновесие не изолировано.

²⁾ Все теоремы этого параграфа были сформулированы Томсоном и Тетом в 1879 г. [58]. Строгое доказательство этих теорем для нелинейных систем в не критических случаях принадлежит Н. Г. Четаеву [49]. Возможность распространить эти теоремы на нелинейные системы общего вида была доказана в шестидесятых годах нашего столетия различными авторами.

Из доказанной теоремы следует, что если неустойчивую потенциальную систему стабилизировать гироскопическими силами (см. начало параграфа), то даже малые силы сопротивления с полной диссипацией (практически они всегда существуют) разрушат с течением времени достигнутую устойчивость. Поэтому устойчивость, существующую при одних потенциальных силах, Томсон и Тет назвали *вековой*, а устойчивость, полученную с помощью гироскопических сил, — *временной*.

В примере 3 следующего параграфа будет показано, что если кроме диссипативных сил имеются ускоряющие силы, то гироскопическая стабилизация неустойчивой потенциальной системы может быть осуществлена.

Остановимся еще на физической интерпретации равенств (6.57) и (6.58). Выражение $T + \Pi$ представляет полную механическую (электромеханическую) энергию. При полной диссипации мощность $N < 0$, а функция Релея $F > 0$. Поэтому

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) < 0.$$

Отсюда следует, что с течением времени полная энергия $T + \Pi$ убывает, рассеивается (разумеется, не исчезает, а переходит в другие виды энергии, например в тепловую). Мощность N и функцию Релея F на основании формул (6.57) и (6.58) можно рассматривать как меру рассеивания полной энергии $T + \Pi$. Этим и объясняется причина, по которой силы положительного сопротивления называют диссипативными силами, а соответствующую функцию Релея F — диссипативной функцией (лат. *dissipare* — рассеивать).

§ 6.6. Примеры на применение теорем Томсона — Тета — Четаева

Пример 1. Устойчивость волчка. Определяя положение оси z волчка углами α и β (см. пример 3 § 2.6 и рис. 2.15), мы видим, что обе координаты при невращающемся волчке неустойчивы (так как центр тяжести C находится выше точки опоры (рис. 6.1, a)). Таким образом, волчок имеет четное число неустойчивых координат и необходимое условие, налагаемое первой теоремой Томсона и Тета, выполнено. Дифференциальные уравнения первого приближения возмущенного движения волчка в переменных α и β были получены в примере 4 § 4.5 (см. (4.49)):

$$\begin{aligned} J_x \ddot{\alpha} + J_z n \dot{\beta} - Pl \alpha &= 0, \\ J_x \ddot{\beta} - J_z n \dot{\alpha} \quad \beta &= 0. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Эти уравнения можно рассматривать как результат наложения на неустойчивую потенциальную систему

$$J_x \ddot{\alpha} - Pl\alpha = 0, \quad J_x \ddot{\beta} - Pl\beta = 0$$

гироскопических сил $J_z n \dot{\beta}$ и $-J_z n \dot{\alpha}$ соответственно.

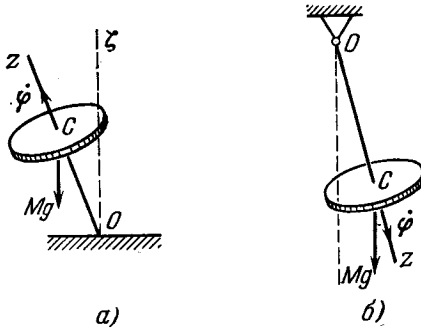


Рис. 6.1

Уравнения (5.59) совпадают с уравнениями (6.52), если положить

$$c_1 = c_2 = -\frac{Pl}{J_x}, \quad g = \frac{J_z n}{J_x}.$$

Условие гироскопической стабилизации (6.54) принимает в данном примере вид

$$J_z n / J_x > 2\sqrt{Pl/J_x}$$

или

$$J_z^2 n^2 > 4PlJ_x.$$

Это условие было получено в примере 3 § 2.6 в нелинейной постановке задачи (см. соотношение (2.33)).

Если центр тяжести C будет ниже точки подвеса (гироскопический маятник) (см. рис. 6.1, б), то обе координаты α и β будут устойчивы. Согласно второй теореме Томсона и Тета, в этом случае устойчивость будет достигаться при любой угловой скорости n . На основании четвертой теоремы Томсона — Тета — Четаева устойчивость волчка временная, а устойчивость гиromаятника вековая.

Пример 2. Устойчивость системы инерциальной навигации. При использовании систем инерциальной навигации для определения координат движущегося объекта (подводной лодки, самолета, космического корабля и т. п.) измеряют обычно его линейное ускорение и угловую скорость относительно инерциальной системы отсчета. Для этой цели могут быть использованы различные устройства, в частности платформа с тремя

гироскопами (они измеряют составляющие абсолютной угловой скорости) и тремя акселерометрами n_x, n_y, n_z (они называются также ньютонометрами) (рис. 6.2). Предположим, что в невозмущенном движении точка O платформы перемещается с постоянной скоростью по параллели Земли, принимаемой за правильный шар, причем оси x, y, z , жестко связанные с платформой, ориентированы географически (ось x направлена на восток, ось y — на север, а ось z — вертикально вверх). В работе [3] получены следующие дифференциальные уравнения возмущенного движения точки O в предположении, что ориентация платформы не нарушается:

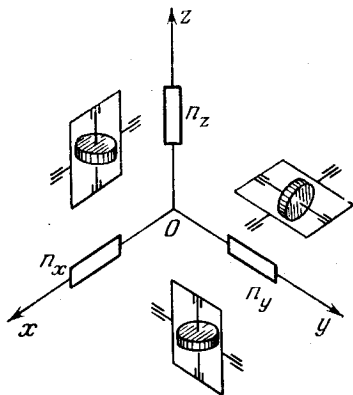


Рис. 6.2

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} - 2\omega_z \frac{d(\delta y)}{dt} + 2\omega_y \frac{d(\delta z)}{dt} + (\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) \delta x &= 0, \\ \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} + 2\omega_z \frac{d(\delta x)}{dt} + (\omega_0^2 - \omega_z^2) \delta y + \omega_y \omega_z \delta z &= 0, \quad (6.60) \\ \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} - 2\omega_y \frac{d(\delta x)}{dt} + \omega_y \omega_z \delta y - (2\omega_0^2 + \omega_y^2) \delta z &= 0. \end{aligned}$$

В этих уравнениях x, y, z — координаты точки O в невозмущенном движении в системе $O_1x_1y_1z_1$ (O_1 — центр Земли, оси O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 параллельны осям Ox, Oy, Oz), $\delta x, \delta y, \delta z$ — отклонения соответствующих координат в возмущенном движении, ω_y, ω_z — проекции абсолютной угловой скорости платформы на оси y и z (при рассматриваемом движении $\omega_x = 0$), $\omega_0 = \mu/r^3$, где μ — гравитационная постоянная Земли, r — расстояние от центра Земли до точки O в невозмущенном движении.

Для удобства изменим масштаб времени, положив

$$\tau = \omega_0 t, \quad (6.61)$$

и введем безразмерные положительные параметры

$$\alpha = \frac{\omega_y^2}{\omega_0^2}, \quad \beta = \frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}. \quad (6.62)$$

Тогда уравнения возмущенного движения (6.60) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\sqrt{\beta} \dot{x}_2 + 2\sqrt{\alpha} \dot{x}_3 + (1 - \alpha - \beta) x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + 2\sqrt{\beta} \dot{x}_1 + (1 - \beta) x_2 + \sqrt{\alpha\beta} x_3 &= 0, \quad (6.63) \\ \ddot{x}_3 - 2\sqrt{\alpha} \dot{x}_1 + \sqrt{\alpha\beta} \dot{x}_2 - (2 + \alpha) x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $x_1 = \delta x, x_2 = \delta y, x_3 = \delta z$, точками обозначены производные $\dot{}$

Исследование устойчивости движения $x_k = 0$ упрощается, если применить теоремы Томсона — Тета — Четаева.

Матрица коэффициентов сил, линейно зависящих от x_1, x_2, x_3 ,

$$C = \begin{vmatrix} 1 - \alpha - \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \beta & \sqrt{\alpha\beta} \\ 0 & \sqrt{\alpha\beta} & -(2 + \alpha) \end{vmatrix}, \quad (6.64)$$

симметрична. Поэтому уравнения (6.63) можно рассматривать как результат наложения на потенциальную систему

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (1 - \alpha - \beta)x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + (1 - \beta)x_2 + \sqrt{\alpha\beta}x_3 &= 0, \\ \ddot{x}_3 + \sqrt{\alpha\beta}x_2 - (2 + \alpha)x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (6.65)$$

гиросконических сил

$$-2\sqrt{\beta}\dot{x}_2 + 2\sqrt{\alpha}\dot{x}_3, \quad 2\sqrt{\beta}\dot{x}_1, \quad -2\sqrt{\alpha}\dot{x}_1$$

соответственно.

Координата x_1 нормальная (первое уравнение (6.65) не связано с двумя другими). Эта координата устойчива, если

$$\alpha + \beta < 1, \quad (6.66)$$

и неустойчива при

$$\alpha + \beta > 1. \quad (6.67)$$

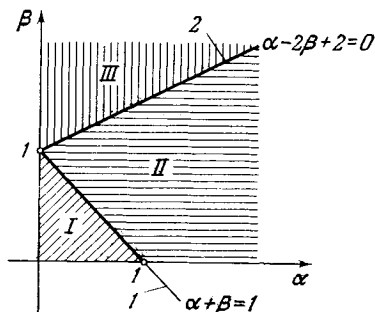


Рис. 6.3

На плоскости α, β область устойчивости координаты x_1 находится в первом квадранте ($\alpha > 0, \beta > 0$) ниже прямой $\alpha + \beta = 1$; область неустойчивости выше этой прямой (рис. 6.3).

Перейдем к рассмотрению последних двух уравнений (6.65) и составим матрицу коэффициентов потенциальных сил:

$$\begin{vmatrix} 1 - \beta & \sqrt{\alpha\beta} \\ \sqrt{\alpha\beta} & -(2 + \alpha) \end{vmatrix}.$$

Найдем главные диагональные миноры:

$$\Delta_1^* = 1 - \beta, \quad \Delta_2^* = -\alpha + 2\beta - 2. \quad (6.68)$$

Ниже прямой $-\alpha + 2\beta - 2 = 0$ определитель $\Delta_2^* < 0$, поэтому среди координат x_2 и x_3 одна устойчива и одна неустойчива; выше этой прямой $\Delta_2^* > 0$ и, следовательно, обе координаты неустойчивы (так как при этом $\Delta_1^* < 0$) (рис. 6.3).

Из сказанного следует.

1. В области I (рис. 6.3) координата x_1 устойчива, а среди координат x_2 и x_3 одна устойчива и одна неустойчива, т. е. в этой области имеется всего одна неустойчивая координата.

2. В области II две координаты неустойчивы (x_1 и одна из x_2 и x_3).

3. В области III все три координаты неустойчивы.

На основании первой теоремы Томсона и Тета гироскопическая стабилизация в областях I и III невозможна. Выясним, можно ли осуществить гироскопическую стабилизацию в области II. Для этого составим характеристическое уравнение системы (6.63):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^2 + (1 - \alpha - \beta) & -2\sqrt{\beta}\lambda & 2\sqrt{\alpha}\lambda \\ 2\sqrt{\beta}\lambda & \lambda^2 + (1 - \beta) & \sqrt{\alpha\beta} \\ -2\sqrt{\alpha}\lambda & \sqrt{\alpha\beta} & \lambda^2 - (2 + \alpha) \end{vmatrix} = 0. \quad (6.69)$$

Раскрывая определитель и группируя члены, приведем это уравнение к виду

$$a_1\lambda^4 + a_2\lambda^2 + a_3 = 0, \quad (6.70)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 2(\alpha + \beta), & a_2 &= (\alpha + \beta)^2 - 3(1 - \alpha + 2\beta), \\ a_3 &= (1 - \alpha - \beta)(-\alpha + 2\beta - 2). \end{aligned} \quad (6.71)$$

Так как характеристическое уравнение (6.70) содержит λ только в четных степенях, то для устойчивости движения необходимо и достаточно, чтобы все корни этого уравнения были чисто мнимыми. Это означает, что корни относительно λ^2 должны быть отрицательны и вещественны. Этим условиям можно удовлетворить, если подчинить коэффициенты a_k критерию Гурвица (4.30)

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \quad (6.72)$$

и условию вещественности корней кубического относительно λ^2 уравнения (6.70). Для этого с помощью подстановки $v = \lambda^2 - \frac{a_1}{3}$ преобразуем уравнение (6.70) к виду

$$v^3 + pv + q = 0$$

и потребуем, чтобы выполнялось неравенство ¹⁾

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Выражая с помощью указанной подстановки p и q через коэффициенты a_1 , a_2 и a_3 , преобразуем последнее неравенство к виду

$$Q = a_2^2(4a_2 - a_1^2) + 27a_3^2 + 2a_1a_3(2a_1^3 - 9a_2) < 0. \quad (6.73)$$

Выразим с помощью формул (6.71) условия (6.72) и (6.73) через параметры α и β и выделим в области II ту ее часть, в которой осуществляется гироскопическая стабилизация. Для этого напомним прежде всего, что параметры α и β положительны и, следовательно, неравенство $a_1 > 0$ выполняется автоматически. Кроме того, в области II коэффициент $a_3 > 0$, а на прямых 1 и 2

¹⁾ Существуют критерии, при выполнении которых все корни уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ вещественны и отрицательны (см., например, [14]).

(рис. 6.3 и 6.4) $a_3 = 0$. Построим отрезки кривых

$$a_2(\alpha, \beta) = 0,$$

$$\Delta_2(\alpha, \beta) = 0,$$

$$Q(\alpha, \beta) = 0,$$

находящиеся в области *II* (вне этой области стабилизация невозможна). При построении полезно отметить, что все эти кривые пересекают прямые *1* и *2* в одних и тех же точках *A* ($8/9, 1/9$) и

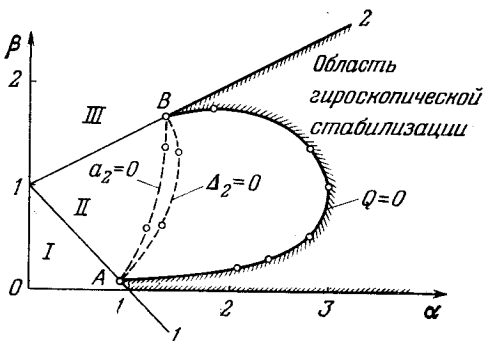


Рис. 6.4

B ($4/3, 5/3$). Действительно, на этих прямых $a_3 = 0$ и функции Δ_2 и Q обращаются в нуль одновременно с a_2 (при $a_3 = 0$ имеем $\Delta_2 = a_1 a_2$, $Q = 4a_2^3 - a_1^2 a_2^2$). Легко установить, что левее кривых $a_2 = 0$ и $\Delta_2 = 0$ функции a_2 и Δ_2 отрицательны, а правее — положительны. Кроме того, $Q > 0$ левее кривой $Q = 0$ и $Q < 0$ правее этой кривой. Таким образом, в области *II* правее кривой $Q = 0$ одновременно выполняются все неравенства (6.72) и (6.73) и, следовательно, в этой области осуществляется гироскопическая стабилизация (кривые $a_2 = 0$ и $\Delta_2 = 0$ пересекают область *II* только по линиям, изображенным на рис. 6.4; часть кривой $Q = 0$, кроме той, что показана на рисунке, находится в области *II*, но она расположена левее кривых $a_2 = 0$ и $\Delta_2 = 0$, где $a_2 < 0$ и $\Delta_2 < 0$).

Пример 3. Гироскопически однорельсовый вагон. В первой четверти XX столетия появились опытные образцы однорельсового вагона и двухколесного автомобиля, центр тяжести которых был выше рельса (дороги) (рис. 6.5). Вертикальное положение самого вагона (автомобиля) неустойчиво, и для стабилизации использовался гироскоп *G*.

Прежде чем установить количественные соотношения, которым должны удовлетворять параметры системы для того, чтобы обеспечить стабилизацию вертикального положения вагона, рассмотрим вопрос с качественной стороны. Центр тяжести *G* вагона находится выше рельса, поэтому угол ψ , определяющий отклонение вагона от вертикали, является неустойчивой координатой. По первой теореме Томсона — Тета — Четаева гироскопическую стабилизацию можно осуществить только при четном числе неустойчивых коэф-

динат. Из этого следует, что вторая координата системы ϕ (угол поворота кольца K , в котором установлен гироскоп) должна быть тоже неустойчивой. Для этой цели к верхней части кольца прикрепляют грузик L . Таким образом, система имеет две неустойчивые координаты ψ и ϕ и гироскопическая стабилизация в принципе может быть осуществлена.

Учтем теперь силы сопротивления, возникающие при колебаниях вагона и кольца с гироскопом (эти силы возникают за счет сопротивления среды и трения в опорах). Согласно четвертой теореме Томсона — Тета — Четаева, эти силы разрушат гироскопическую стабилизацию (так как без гироскопа система неустойчива). Поэтому для стабилизации необходимо ввести силы другой природы. С этой целью на оси $N - N$ вращения кольца K устанавливалось специальное электромагнитное устройство (на рисунке оно не показано), которое создавало ускоряющий момент $k_2\dot{\phi}$, действующий в сторону вращения кольца и пропорциональный угловой скорости вращения его (в теории колебаний такие моменты и силы называются отрицательным трением).

Установив с помощью теорем Томсона и Тета характер сил, которые должны обеспечить устойчивость однорельсового гироскопического вагона, перейдем к количественному анализу. Для этого воспользуемся дифференциальными уравнениями возмущенного движения системы (эти уравнения без труда составит читатель, воспользовавшись уравнениями Лагранжа II рода или уравнениями моментов (см. также [42])):

$$\begin{aligned} A_1\ddot{\psi} + k_1\dot{\psi} - H\dot{\phi} - c_1\psi &= \Psi, \\ A_2\ddot{\phi} - k_2\dot{\phi} + H\dot{\psi} - c_2\phi &= \Theta, \end{aligned} \quad (6.74)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= J + (M + M_0)a^2 + A + C_0, \\ A_2 &= A_0 + A, \quad c_1 = P \cdot c, \quad c_2 = p \cdot b. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Здесь A_0 и C_0 — моменты инерции кольца, M_0 — его масса, A — экваториальный момент инерции гироскопа, M — его масса, J — момент инерции вагона относительно оси рельса, P — вес вагона, p — вес добавочного грузика L , H — кинетический момент гироскопа, k_1 — коэффициент сил сопротивления, действующих на вагон, k_2 — крутизна характеристики устройства, создающего ускоряющую силу $k_2\dot{\phi}$; значения постоянных a , b и c видны из рис. 6.5 (G — центр тяжести всей системы, исключая грузик L), Ψ и Θ — нелинейные члены.

Уравнения (6.74) можно рассматривать как результат наложения на неустойчивую потенциальную систему

$$A_1\ddot{\psi} - c_1\psi = 0, \quad A_2\ddot{\phi} - c_2\phi = 0$$

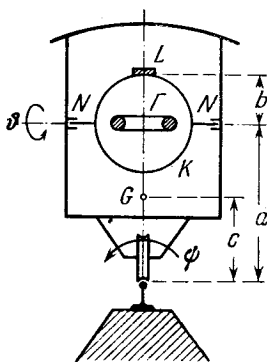


Рис. 6.5

гироскопических сил — $H\dot{\theta}$ и $H\dot{\psi}$, диссипативной силы $k_1\dot{\psi}$, ускоряющей силы — $k_2\dot{\theta}$ и нелинейных сил Ψ и Θ соответственно.

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} A_1\lambda^2 + k_1\lambda - c_1 & -H\lambda \\ H\lambda & A_2\lambda^2 - k_2\lambda - c_2 \end{vmatrix} = 0$$

или, раскрывая определитель и группируя члены,

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (6.76)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= A_1A_2, & a_1 &= k_1A_2 - k_2A_1, \\ a_2 &= H^2 - c_2A_1 - c_1A_2 - k_1k_2, & & (6.77) \\ a_3 &= k_2c_1 - k_1c_2, & a_4 &= c_1c_2. \end{aligned}$$

Воспользуемся критерием Гурвица (4.32) для системы четвертого порядка ($a_0 > 0$):

$$\begin{aligned} a_1 > 0, & \quad a_2 > 0, & \quad a_3 > 0, & \quad a_4 > 0, \\ \Delta_3 &= a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 > 0. \end{aligned}$$

В нашем случае условия $a_0 > 0$ и $a_4 > 0$ выполняются автоматически, а условие $a_2 > 0$ следует из неравенства $\Delta_3 > 0$.

Подчиняя с помощью формул (6.77) параметры системы оставшимся условиям ($a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $\Delta_3 > 0$), легко найдем

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{c_1} k_1 < k_2 < \frac{A_2}{A_1} k_1, \\ H^2 > c_2A_1 + c_1A_2 + k_1k_2 + \frac{A_1A_2(k_2c_1 - k_1c_2)^2 + c_1c_2(k_1A_2 - k_2A_1)^2}{(k_2c_1 - k_1c_2)(k_1A_2 - k_2A_1)}. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Первое условие устанавливает пределы для крутизны k_2 характеристики устройства, создающего ускоряющий момент, второе условие определяет нижнюю границу кинетического момента H . Так как при выполнении условий (6.78) все корни характеристического уравнения будут иметь отрицательные вещественные части, то на основании первой теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению однорельсовый вагон асимптотически устойчив независимо от членов высшего порядка Ψ и Θ .

Из формул (6.77) видно, что при $k_2 < 0$ (вместо ускоряющего момента имеется обычная сила сопротивления) коэффициент a_3 будет отрицателен и система в соответствии с четвертой теоремой Томсона — Тета — Четаева делается неустойчивой¹⁾.

1) Во многих вузах имеются модели однорельсового гироскопического вагона. При демонстрации необходимо следить за тем, чтобы грузик кольца занимал верхнее вертикальное положение; при колебаниях кольца нужно слегка подталкивать его в сторону движения, имитируя ускоряющее устройство.

§ 6.7. Устойчивость равновесия под действием одних гироскопических и диссипативных сил. Пример

До сих пор рассматривались системы, в которых диссипативные и гироскопические силы действовали вместе с потенциальными силами. Между тем в приложениях встречаются системы, в которых диссипативные и гироскопические силы действуют без потенциальных сил. Изучению устойчивости таких систем посвящен этот параграф.

а. Одни гироскопические силы. Рассмотрим вначале случай, когда на систему действуют только гироскопические силы, считая, что уравнения возмущенного движения приведены к форме

$$\ddot{z} + G\dot{z} = 0. \quad (6.79)$$

Теорема 1. *Равновесие системы, на которую действуют одни гироскопические силы, всегда устойчиво относительно скоростей [38].*

Доказательство. Умножим справа обе части уравнения (6.79) на матрицу \dot{z} . Тогда, учитывая, что для кососимметричной матрицы G имеет место равенство $G\dot{z} \cdot \dot{z} = 0$ (см. формулу (5.25)), получим

$$\dot{z} \cdot \ddot{z} = 0$$

или, интегрируя,

$$\frac{1}{2} \dot{z} \cdot \dot{z} = \frac{1}{2} (\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \dots + \dot{z}_s^2) = h, \quad (6.81)$$

где h — постоянная интегрирования.

Функция $V = \frac{1}{2} \dot{z} \cdot \dot{z}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения (она определенно-положительна и ее полная производная по времени в силу уравнений возмущенного движения тождественно равна нулю (см. § 2.2)), что доказывает теорему.

Примечание. Теорема доказана для линейной автономной системы, но она справедлива и для линейной неавтономной системы, когда гироскопическая матрица G зависит явно от времени (равенство $G\dot{z} \cdot \dot{z} = 0$, на котором базируется доказательство теоремы, справедливо для любой кососимметричной матрицы, зависящей явным образом от времени), а также для нелинейной системы (см. статью В. В. Румянцева [45]).

Устойчивость равновесия определяется, конечно, не только устойчивостью в скоростях, но и устойчивостью

в координатах. Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия устойчивости системы (6.51) относительно совокупности координат и скоростей.

Теорема 2. *Для того чтобы равновесие линейной автономной системы, находящейся под действием одних гироскопических сил, было устойчивым относительно координат, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы гироскопических сил не равнялся нулю [38].*

Доказательство. Докажем вначале, что если $\det G \neq 0$, то невозмущенное движение $z = 0$, $\dot{z} = 0$ устойчиво относительно координат z (устойчивость относительно скоростей доказана предыдущей теоремой при любом значении $\det G$). Проинтегрируем уравнение (6.79) один раз по времени

$$\dot{z} + Gz = D, \quad (6.81)$$

где D — постоянная интегрирования матрица-столбец определена равенством

$$D = \dot{z}_0 + Gz_0. \quad (6.82)$$

Перейдем к новой переменной матрице y по формуле

$$z = y + G^{-1}D \quad (6.83)$$

(так как по условию матрица G неособенная, то обратная матрица G^{-1} существует). После подстановки в уравнение (6.81) получим

$$\dot{y} + Gy + GG^{-1}D = D$$

или, учитывая тождество $GG^{-1}D = ED = D$,

$$\dot{y} + Gy = 0. \quad (6.84)$$

Согласно теореме 1 этого параграфа, движение устойчиво относительно скоростей \dot{z} . Из совпадения форм уравнений (6.79) и (6.84) следует, что движение устойчиво относительно y . На основании равенств (6.82) и (6.83) заключаем, что движение устойчиво относительно координат z (при достаточно малых по модулю z_0 и \dot{z}_0 элементы матрицы D будут также малы).

Докажем теперь необходимость условия теоремы. Для этого достаточно показать, что при $\det G = 0$ система неустойчива. Составим характеристическое уравнение

для дифференциального уравнения (6.79):

$$\Delta = \det (E\lambda^2 + G\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 & g_{12}\lambda & \dots & g_{1s}\lambda \\ g_{21}\lambda & \lambda^2 & \dots & g_{2s}\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{s1}\lambda & g_{s2}\lambda & \dots & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.85)$$

Вынесем из каждой строки общий множитель λ :

$$\Delta = \lambda^s \begin{vmatrix} \lambda & g_{12} & \dots & g_{1s} \\ g_{21} & \lambda & \dots & g_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{s1} & g_{s2} & \dots & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

и разложим полученный определитель по степеням λ :

$$\Delta = \lambda^s (\lambda^s + \dots + a_s) = 0.$$

Очевидно, что

$$a_s = \begin{vmatrix} 0 & g_{12} & \dots & g_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{s1} & g_{s2} & \dots & 0 \end{vmatrix} = \det G.$$

Из условия $\det G = 0$ и последних двух равенств следует, что уравнение (6.85) имеет не менее $s + 1$ нулевых корней.

Перейдем теперь к исследованию элементарных делителей характеристической матрицы (см. § 5.3)

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & g_{12}\lambda & \dots & g_{1s}\lambda \\ g_{21}\lambda & \lambda^2 & \dots & g_{2s}\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{s1}\lambda & g_{s2}\lambda & \dots & \lambda^2 \end{vmatrix}.$$

Обозначим через D_k общие наибольшие делители всех миноров k -го порядка. Очевидно, что $D_1 = \lambda$, D_2 делится на λ^2 , D_3 делится на λ^3 и т.д. (так как все элементы этой матрицы имеют общий множитель λ). Поэтому все инвариантные множители

$$E_k = \frac{D_k}{D_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \dots, s; D_0 = 1)$$

делятся на λ , т. е. каждый инвариантный множитель $E_k(\lambda)$ имеет по крайней мере один нулевой корень.

Воспользуемся формулой (5.28):

$$\kappa \det F(\lambda) = E_1(\lambda) E_2(\lambda) \dots E_s(\lambda).$$

Так как число нулевых корней левой части не менее $s + 1$, а в правой части имеется s инвариантных множителей $E_k(\lambda)$, то хотя бы один из них содержит нулевой корень кратности больше первой. Это доказывает неустойчивость системы (см. § 5.4 с. 146).

Следствие. Если на систему действуют только гироскопические силы и она имеет нечетное число координат, то равновесие такой системы всегда неустойчиво (если s — нечетное число, то $\det G$ тождественно равен нулю (см. § 5.2, с. 129)).

Примечание 1. Так как невозмущенное движение устойчиво относительно скоростей при любом значении $\det G$, то из доказательства неустойчивости системы следует, что при $\det G = 0$ система теряет устойчивость только в координатах.

Примечание 2. Если $\det G \neq 0$, то характеристический определитель системы имеет ровно s нулевых корней. Из устойчивости системы следует, что эти корни простые для элементарных делителей.

Примечание 3. Уравнение (6.79) во многих случаях представляет уравнение первого приближения нелинейной системы, на которую действуют только гироскопические силы. Конечно, из устойчивости движения при $\det G \neq 0$, определяемого уравнением первого приближения, не следует устойчивость исходной нелинейной системы.

б. Гироскопические и диссипативные силы. Прежде чем перейти к исследованию влияния диссипативных сил, приведем один результат теории определителей, который понадобится нам и в других разделах (доказательство будет приведено в конце параграфа).

Пусть даны две квадратные матрицы одного порядка s : одна матрица B_0 — знакоопределенная диагональная и вторая G — кососимметричная. Составим определитель Δ матрицы $B_0 + G$:

$$\Delta = \det (B_0 + G).$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Матрица $B_0 + G$ неособенная, т. е.

$$\Delta = \det (B_0 + G) \neq 0. \quad (6.86)$$

2. Если матрица B_0 определенно-положительна, то

$$\Delta = \det (B_0 + G) > 0. \quad (6.87)$$

3. Если матрица B_0 определенно-отрицательна, то при s четном $\Delta = \det (B_0 + G) > 0$, (6.88)

при s нечетном $\Delta = \det (B_0 + G) < 0$. (6.89)

Рассмотрим теперь влияние диссипативных сил.

Теорема 3. *Если помимо гироскопических сил действуют силы полной диссипации, то равновесие системы асимптотически устойчиво относительно скоростей и просто устойчиво относительно координат [38].*

Доказательство. Приведем уравнения возмущенного движения к виду (6.46), учтя, что по условию теоремы имеются только гироскопические и диссипативные силы,

$$\ddot{z} + B_0 \dot{z} + Gz = 0. \quad (6.90)$$

В этом уравнении G — кососимметричная, а B_0 — определенно-положительная диагональная матрицы (так как диссипация является полной). Умножим обе части этого уравнения на матрицу \dot{z} :

$$\ddot{z} \cdot \dot{z} + B_0 \dot{z} \cdot \dot{z} + Gz \cdot \dot{z} = 0$$

или, преобразуя первое слагаемое и принимая во внимание, что для кососимметричной матрицы $Gz \cdot \dot{z} = 0$, будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{z} \cdot \dot{z}) = -B_0 \dot{z} \cdot \dot{z}.$$

В развернутой форме это равенство имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{z}_1^2 + \dots + \dot{z}_s^2) = -(b_1 \dot{z}_1^2 + \dots + b_s \dot{z}_s^2).$$

Функция $V = \frac{1}{2} \dot{z} \cdot \dot{z} = \frac{1}{2} (\dot{z}_1^2 + \dots + \dot{z}_s^2)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости — она определенно-положительна относительно скоростей \dot{z}_k и ее полная производная по времени в силу уравнения возмущенного движения (6.90) является определенно-отрицательной функцией тех же величин \dot{z}_k (по условию теоремы диссипация полная и, следовательно, все $b_k > 0$). Таким образом, движение асимптотически устойчиво относительно скоростей \dot{z}_k .

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Проинтегрируем уравнение (6.90) один раз по времени:

$$\dot{z} + (B_0 + G)z = D, \quad (6.91)$$

где постоянная матрица D определена равенством

$$D = \dot{z}_0 + (B_0 + G) z_0. \quad (6.92)$$

Согласно равенству (6.86) матрица $B_0 + G$ неособенная, вследствие чего существует обратная матрица $(B_0 + G)^{-1}$. Введем новую переменную матрицу y , определив ее равенством

$$z = y + (B_0 + G)^{-1} D. \quad (6.93)$$

После подстановки в уравнение (6.91) получим

$$\dot{y} + (B_0 + G) y + (B_0 + G)^{-1} (B_0 + G) D = D$$

или, учитывая, что $(B_0 + G)^{-1} (B_0 + G) D = D$,

$$\dot{y} + (B_0 + G) y = 0. \quad (6.94)$$

Согласно первой части теоремы, движение асимптотически устойчиво относительно скоростей \dot{z} . Из совпадения форм уравнений (6.90) и (6.94) следует, что движение асимптотически устойчиво относительно y . На основании равенств (6.93) и (6.92) заключаем, что движение устойчиво (но не асимптотически) относительно координат z .

Примечание. Теорема остается справедливой и в нелинейной постановке задачи [36, 38].

Пример. Исследование устойчивости движения электрона в постоянном магнитном поле. Если m — масса электрона, e — его заряд, H — напряженность магнитного поля, c — электродинамическая постоянная, равная скорости света ($c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек), то уравнение движения электрона при $H = \text{const}$ будет

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{e}{c} (v \times H), \quad (6.95)$$

где v — вектор скорости электрона [48].

Запишем это уравнение через проекции на оси неподвижной системы координат:

$$m \frac{dv}{dt} - \frac{e}{c} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда найдем

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - \frac{e}{c} H_z \dot{y} + \frac{e}{c} H_y \dot{z} &= 0, \\ m\ddot{y} + \frac{e}{c} H_z \dot{x} - \frac{e}{c} H_x \dot{z} &= 0, \\ m\ddot{z} - \frac{e}{c} H_y \dot{x} + \frac{e}{c} H_x \dot{y} &= 0. \end{aligned} \quad (6.96)$$

В этих уравнениях матрица сил, линейно зависящих от скоростей \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , кососимметричная. Следовательно, эти силы гироскопические. Так как другие силы отсутствуют, то на основании теоремы 1 этого параграфа заключаем, что невозмущенное движение электрона устойчиво относительно скоростей \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , а на основании следствия теоремы 2 оно неустойчиво относительно совокупности всех координат x , y , z (так как число координат равно трем).

Если ось z направить параллельно вектору H , то $H_x = 0$, $H_y = 0$, $H_z = H$ и уравнения (6.96) примут вид

$$m\ddot{x} - \frac{e}{c} H\dot{y} = 0,$$

$$m\ddot{y} + \frac{e}{c} H\dot{x} = 0,$$

$$m\ddot{z} = 0.$$

Рассмотрим первые два уравнения отдельно (они не зависят от третьего уравнения). Определитель матрицы гироскопических коэффициентов для этих уравнений

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{e}{c} H \\ \frac{e}{c} H & 0 \end{vmatrix} = \frac{e^2}{c^2} H^2$$

отличен от нуля, поэтому, согласно теореме 2, движение электрона устойчиво относительно координат x и y . Что же касается координаты z , то из третьего уравнения имеем $z = \dot{z}_0 t + z_0$, откуда сразу видна неустойчивость по этой координате.

В заключение этого параграфа докажем соотношения (6.86)—(6.89).

Введем вспомогательный параметр μ и составим определитель

$$\Delta(\mu) = \det(\mu B_0 + G) = \begin{vmatrix} \mu b_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1s} \\ g_{21} & \mu b_{22} & \cdots & g_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{s1} & g_{s2} & \cdots & \mu b_{ss} \end{vmatrix}. \quad (6.97)$$

Очевидно, что искомый определитель Δ получается из $\Delta(\mu)$ при $\mu = 1$:

$$\Delta = \Delta(1). \quad (6.98)$$

Вычислим $\Delta(-\mu) = \det(-\mu B_0 + G)$. Поменяем в этом определителе строки на столбцы и наоборот (определитель от этого не изменится). Эта операция равносильна замене матриц B_0 и G на транспонированные:

$$\Delta(-\mu) = \det(-\mu B_0 + G) = \det(-\mu B'_0 + G').$$

Учтем теперь, что матрица B_0 диагональная, а G кососимметричная. Поэтому

$$B'_0 = B_0, \quad G = -G'.$$

Внося эти выражения в $\Delta(-\mu)$, получим

$$\Delta(-\mu) = \det(-\mu B_0 - G) = \begin{vmatrix} -\mu b_1 & \dots & -g_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ -g_{s1} & \dots & -\mu b_s \end{vmatrix}.$$

Вынесем из каждой строки общий множитель -1 :

$$\Delta(-\mu) = (-1)^s \begin{vmatrix} \bar{\mu} b_1 & g_{12} & \dots & g_{1s} \\ g_{21} & \mu b_2 & \dots & g_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{s1} & g_{s2} & \dots & \mu b_s \end{vmatrix}$$

или, принимая во внимание равенство (6.97), получим

$$\Delta(-\mu) = (-1)^s \Delta(\mu). \quad (6.99)$$

Отсюда следует, что при s четном $\Delta(\mu)$ содержит μ только в четных степенях, а при s нечетном — в нечетных степенях, т. е.

$$\Delta(\mu) = a_0 \mu^s + a_2 \mu^{s-2} + \dots + a_{s-2} \mu^2 + a_s \quad (s = 2k),$$

$$\Delta(\mu) = \mu (a_0 \mu^{s-1} + a_2 \mu^{s-3} + \dots + a_{s-3} \mu^2 + a_{s-1}) \quad (s = 2k + 1), \quad (6.100)$$

где a_k — некоторые коэффициенты.

Пользуясь теперь равенством (6.98), получим

$$\begin{aligned} \Delta &= a_0 + a_2 + \dots + a_{s-2} + a_s \quad (s = 2k), \\ \Delta &= a_0 + a_2 + \dots + a_{s-3} + a_{s-1} \quad (s = 2k + 1). \end{aligned} \quad (6.101)$$

Рассмотрим теперь структуру коэффициентов a_k . Параметр μ содержится в определителе (6.97) множителем элементов, стоящих на главной диагонали. Поэтому

$$a_0 = b_1 b_2 \dots b_s. \quad (6.102)$$

Перейдем к другим коэффициентам a_2, a_4 и т. д. Возьмем для примера a_2 . Этот коэффициент стоит в равенствах (6.100) множителем при μ^{s-2} . Такой множитель может получиться в разложении определителя (6.97), если взять любые $s - 2$ элемента главной диагонали и умножить их на минор, который получается из матрицы G вычеркиванием всех строк и столбцов, пересекающихся на выбранных элементах. Так, например, если мы возьмем элементы b_1, b_2, \dots, b_{s-3} , то соответствующий минор будет

$$\Delta_{1,2,\dots,s-3} = \begin{vmatrix} 0 & g_{s-1,s} \\ g_{s,s-1} & 0 \end{vmatrix} = g_{s-1,s}^2$$

а для элементов b_3, b_4, \dots, b_s

$$\Delta_{3,4,\dots,s} = \begin{vmatrix} 0 & g_{12} \\ g_{11} & 0 \end{vmatrix} = g_{12}^2.$$

Взяв всевозможные сочетания из s элементов главной диагонали по $s - 2$ элемента и умножив их на соответствующие миноры,

получим

$$a_2 = \sum_1 b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} \dots b_{\alpha_{s-2}} \Delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-2}}.$$

Здесь сумма распространена на все сочетания индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-2}$ из $1, 2, \dots, s$, а $\Delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-2}}$ — диагональные миноры матрицы G , получающиеся из нее вычеркиванием строк и столбцов с индексами $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-2}$. Эти миноры представляют собой кососимметричные определители второго порядка, и, следовательно, они не отрицательны. Для коэффициентов a_4, a_6 и т. д. получим аналогичные суммы, в которых соответствующие миноры будут иметь четвертый, шестой и т. д. порядок.

В общем случае будем иметь (n — четное число)

$$a_{s-n} = \sum_1 b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} \dots b_{\alpha_{s-n}} \Delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-n}}, \quad (6.103)$$

где

$$\Delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-n}} \geq 0 \quad (6.104)$$

(как кососимметричные определители четного порядка).

Пусть теперь все b_1, b_2, \dots, b_s положительны (B_0 — определенно-положительная матрица). Тогда, принимая во внимание (6.102)—(6.104), получим

$$a_0 > 0, \quad a_{s-n} \geq 0 \quad (n = 2, 4, \dots).$$

Пользуясь равенствами (6.104), найдем $\Delta > 0$, что доказывает соотношение (6.87).

Рассмотрим теперь случай, когда все $b_k < 0$ (B_0 — определенно-отрицательная матрица) и s — четное число. Тогда в равенстве (6.103) число множителей b_k будет четное, произведение $b_{\alpha_1} \dots b_{\alpha_{s-n}}$ четного числа отрицательных чисел b_k будет положительно и все $a_{s-n} \geq 0$ ($n = 2, 4, \dots, s$). Принимая во внимание, что при четном s коэффициент $a_0 > 0$, из первого равенства (6.104) найдем $\Delta > 0$. Это доказывает соотношение (6.88).

Перейдем теперь к последнему случаю, когда b_1, \dots, b_s отрицательны и s — нечетное число. Из равенства (6.102) найдем $a_0 < 0$ (произведение нечетного числа отрицательных чисел), а из (6.103) и (6.104) получим $a_{s-n} \leq 0$ ($n = 2, 4, \dots, s-1$). Из второго равенства (6.104) следует $\Delta < 0$, что доказывает соотношение (6.89).

Осталось доказать соотношение (6.86). Но оно следует из только что доказанных неравенств (6.87)—(6.89).

§ 6.8. Влияние на устойчивость равновесия неконсервативных позиционных сил

а. Одни неконсервативные позиционные силы. Рассмотрим сначала случай, когда движение системы происходит под действием одних неконсервативных сил.

Теорема 1. *Равновесие системы, находящейся под действием одних линейных неконсервативных позиционных*

сил, всегда неустойчиво независимо от членов высшего порядка.

Доказательство. В условиях теоремы уравнения возмущенного движения можно привести к виду (6.45), где $B = G = C_0 = 0$:

$$\ddot{z} + Pz = Z. \quad (6.105)$$

Здесь P — кососимметричная матрица, Z — матрица-столбец, элементы которой содержат z_i и \dot{z}_k в степени выше первой, причем они обращаются в нуль, когда все z_k и \dot{z}_k равны нулю.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) = \det(E\lambda^2 + P) = 0. \quad (6.106)$$

Из устойчивости системы (6.79) относительно скоростей следует, что не равные нулю корни уравнения (6.85)

$$\det(E\lambda^2 + G\lambda) = \lambda^s \det(E\lambda + G) = 0$$

будут чисто мнимыми числами. Это означает, что отличные от нуля корни уравнения

$$\Delta(\lambda) = \det(E\lambda + G) = 0 \quad (6.107)$$

имеют вид $\lambda = \pm ai$, где a — положительное вещественное число¹⁾.

Уравнение (6.106) получается из уравнения (6.107) простой заменой λ на λ^2 (матрица P , так же как и G , кососимметричная). Поэтому не равные нулю корни характеристического уравнения (6.106) относительно λ^2 имеют вид

$$\lambda^2 = \pm ai.$$

Отсюда

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{2a}}{2}(1 \pm i).$$

Таким образом, среди корней характеристического уравнения (6.106) имеются корни с положительной вещественной частью. Это доказывает теорему.

¹⁾ Легко показать, что $\Delta(-\lambda) = (-1)^s \Delta(\lambda)$. Следовательно, если λ — корень уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, то $-\lambda$ тоже корень этого уравнения. Поэтому, если имеется корень, вещественная часть которого не равна нулю, то должен быть корень, вещественная часть которого положительна. Но в этом случае движение будет неустойчиво, что противоречит доказанной теореме 1 § 6.7. Из этого следует, что все отличные от нуля корни уравнения (6.85) — чисто мнимые числа.

В этой теореме предполагалось, что неконсервативные позиционные силы линейны. Кроме того, не учитывались силы сопротивления, которые практически существуют почти во всех системах. Поэтому рассмотрим теперь случай произвольных неконсервативных позиционных сил, считая, что сила $\mathbf{R}(q)$ обращается в нуль при $q = 0$ и что эта точка равновесия изолирована, т. е.

$$\mathbf{R}(0) = 0, \mathbf{R}(q) \neq 0, \text{ если } q \neq 0. \quad (6.108)$$

Кроме того, будем считать, что на систему действуют линейные диссипативные силы и возмущенное движение описывается уравнением (6.50).

Теорема 2. *Равновесие системы, находящейся под действием произвольных неконсервативных позиционных сил и линейных диссипативных сил, всегда неустойчиво.*

Доказательство. Уравнения возмущенного движения имеют вид (см. (6.50))

$$\frac{d}{dt}(A\dot{q}) = \mathbf{R}(q) - B\dot{q}. \quad (6.109)$$

Здесь $\mathbf{R}(q)$ — произвольная неконсервативная позиционная сила, B — постоянная неотрицательная, а $A(q)$ — определенно-положительная матрица (см. § 5.2, б).

Рассмотрим функцию

$$V = A\dot{q} \cdot q + \frac{1}{2} Bq \cdot q. \quad (6.110)$$

Вычислим ее полную производную по времени

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}(A\dot{q}) \cdot q + A\dot{q} \cdot \dot{q} + B\dot{q} \cdot q. \quad (6.111)$$

Пользуясь уравнением возмущенного движения (6.109), найдем

$$\dot{V} = \mathbf{R} \cdot q + A\dot{q} \cdot \dot{q},$$

или, принимая во внимание общее определение неконсервативных позиционных сил (6.15),

$$\dot{V} = A\dot{q} \cdot \dot{q}.$$

На множестве K ($\dot{q} = 0, q \neq 0$) производная $\dot{V} = 0$, а вне этого множества $\dot{V} > 0$. Кроме того, множество K не содержит целых траекторий, ибо на K уравнение (6.109) принимает вид

$$\mathbf{R}(q) = 0, \quad q \neq 0,$$

что невозможно в силу условия (6.108).

Так как функция V , определенная равенством (6.110), может принимать положительные значения (например, при $q = \dot{q}$), то доказательство теоремы 2 следует из теоремы Н. Н. Красовского о неустойчивости движения (см. § 2.4).

Примечание 1. Для доказательства не требуется полная диссипация, поэтому теорема остается справедливой и при отсутствии сил сопротивления.

Примечание 2. Теорема 1 в общем случае не является следствием теоремы 2, так как входящие в правую часть уравнения (6.105) члены высшего порядка могут быть образованы другими существенно нелинейными силами.

б. **Неконсервативные и потенциальные силы.** Перейдем теперь к случаю, когда на систему действуют одновременно потенциальные и неконсервативные позиционные силы. Ограничиваясь пока линейным случаем, возьмем уравнения возмущенного движения в форме (6.45):

$$\ddot{z} + C_0 z + Pz = 0. \quad (6.112)$$

Здесь C_0 — диагональная, а P — кососимметричная матрицы. Составим характеристическое уравнение:

$$\det(E\lambda^2 + C_0 + P) = 0.$$

Так как λ содержится в этом определителе только в квадратах, то в развернутой форме будем иметь

$$\lambda^{2s} + a_2 \lambda^{2s-2} + \dots + a_{2s-2} \lambda^2 + a_{2s} = 0. \quad (6.113)$$

В этом уравнении

$$a_2 = c_1 + \dots + c_s, \quad a_{2s} = \det(C_0 + P), \quad (6.114)$$

где c_1, \dots, c_s — элементы матрицы C_0 (см. (6.47)).

Левая часть уравнения (6.113) не изменяется от замены λ на $-\lambda$, поэтому для устойчивости необходимо, чтобы все корни этого уравнения относительно λ были чисто мнимыми числами, а относительно λ^2 — вещественными отрицательными (в противном случае среди корней уравнения (6.113) будут корни с положительной вещественной частью).

На основании теоремы 1 этого параграфа система без потенциальных сил (при $C_0 = 0$) неустойчива. Поэтому можно ожидать, что добавление к устойчивой потенциальной системе неконсервативных сил может в некоторых случаях разрушить устойчивость. Покажем на примере,

что неконсервативные позиционные силы могут не только разрушить устойчивость потенциальной системы, но и стабилизировать неустойчивую потенциальную систему. Для этого рассмотрим систему с двумя степенями свободы. Пусть уравнения возмущенного движения приведены к виду

$$\ddot{x} + c_1x - py = 0, \quad \ddot{y} + c_2y + px = 0. \quad (6.115)$$

Эти уравнения можно рассматривать как результат наложения на потенциальную систему

$$\ddot{x} + c_1x = 0, \quad \ddot{y} + c_2y = 0 \quad (6.116)$$

неконсервативных сил py и $-px$ с кососимметричной матрицей коэффициентов

$$\begin{vmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{vmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение системы (6.115)

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_1 & -p \\ p & \lambda^2 + c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

или, раскрывая определитель,

$$\lambda^4 + (c_1 + c_2)\lambda^2 + c_1c_2 + p^2 = 0. \quad (6.117)$$

Система будет устойчива, если оба корня относительно λ^2 будут вещественны и отрицательны. Для этого необходимо потребовать, чтобы коэффициенты и дискриминант уравнения (6.117) были положительны:

$$c_1 + c_2 > 0, \quad c_1c_2 + p^2 > 0, \quad (c_1 + c_2)^2 - 4(c_1c_2 + p^2) > 0.$$

Преобразуя последнее неравенство, приведем условие устойчивости к виду

$$c_1 + c_2 > 0, \quad c_1c_2 > -p^2, \quad |c_1 - c_2| > 2|p|. \quad (6.118)$$

При $p = 0$, т. е. при отсутствии неконсервативных позиционных сил, эти условия дают $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что непосредственно следует и из уравнений (6.116). На плоскости параметров c_1 и c_2 область устойчивости потенциальной системы (6.116) заполняет весь первый квадрант (рис. 6.6, а). При $p \neq 0$ область устойчивости показана на рис. 6.6, б. Границами этой области служат прямая 1 ($c_1 + c_2 = 0$), ветви гиперболы $c_1c_2 = -p^2$ и прямые 2 и 3 ($c_1 - c_2 = \pm 2p$), касающиеся гипербол в их вершинах. Из рисунка видно, что значительная часть области

устойчивости потенциальной системы (6.116), занимающая весь первый квадрант (рис. 6,6, а), при добавлении неконсервативных позиционных сил переходит в область неустойчивости (коридор между заштрихованными областями рис. 6.6, б). Одновременно видно, что небольшие части области устойчивости рассматриваемой системы (6.115) расположены во втором и четвертом квадрантах,

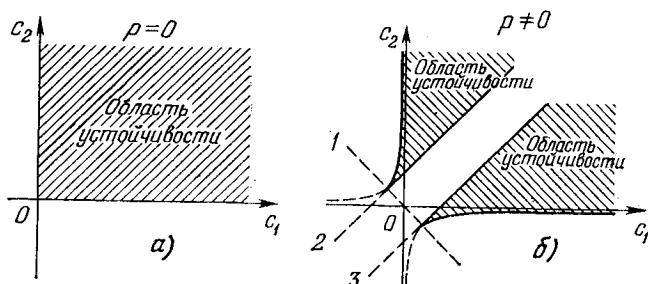


Рис. 6.6

где одна потенциальная система (6.116) неустойчива. Таким образом, неконсервативные позиционные силы могут разрушить устойчивость потенциальной системы, но в некоторых случаях они стабилизируют ее.

На рассмотренном примере (6.115) покажем, как могут влиять диссипативные силы на устойчивость движения системы с потенциальными и неконсервативными позиционными силами. Для этого присоединим к системе (6.115) силы $-b_1\dot{x}$ и $-b_2\dot{y}$, где b_1 и b_2 положительны. Тогда получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} + b_1\dot{x} + c_1x - py &= 0, \\ \ddot{y} + b_2\dot{y} + c_2y + px &= 0. \end{aligned} \quad (6.119)$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + b_1\lambda + c_1 & -p \\ p & \lambda^2 + b_2\lambda + c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

или, раскрывая определитель,

$$\lambda^4 + (b_1 + b_2)\lambda^3 + (c_1 + c_2 + b_1b_2)\lambda^2 + (c_1b_2 + c_2b_1)\lambda + c_1c_2 + p^2 = 0.$$

Напишем для этого уравнения критерий Гурвица (4.32):

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 > 0, \quad c_1 + c_2 + b_1b_2 > 0, \quad c_1b_2 + c_2b_1 > 0, \\ c_1c_2 + p^2 > 0, \end{aligned} \quad (6.120)$$

$$\Delta_3 = (b_1 + b_2)(c_1 + c_2 + b_1 b_2)(c_1 b_2 + c_2 b_1) - \\ - (c_1 b_2 + c_2 b_1)^2 - (b_1 + b_2)^2 (c_1 c_2 + p^2) > 0.$$

Преобразуем последнее неравенство:

$$\Delta_3 = b_1 b_2 (b_1 + b_2)(c_1 b_2 + c_2 b_1) + b_1 b_2 (c_2 - c_1)^2 - \\ - (b_1 + b_2)^2 p^2 > 0. \quad (6.121)$$

Покажем прежде всего, что диссипативные силы могут при некоторых условиях стабилизировать неустойчивую систему (6.115). Действительно, при $c_1 = c_2 = c > 0$ критерий Гурвица примет вид

$$b_1 + b_2 > 0, \quad 2c + b_1 b_2 > 0, \\ c(b_1 + b_2) > 0, \quad c^2 + p^2 > 0, \\ \Delta_3 = (b_1 + b_2)^2 (b_1 b_2 c - p^2) > 0.$$

Первые четыре условия выполняются автоматически (по предположению, $c > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$), а последнее неравенство будет выполнено, если подчинить диссипативные силы условию

$$b_1 b_2 > \frac{p^2}{c}. \quad (6.122)$$

Таким образом, неустойчивую систему, находящуюся под действием потенциальных и неконсервативных позиционных сил, можно стабилизировать диссипативными силами (при $c_1 = c_2$, $p \neq 0$ и $b_1 = b_2 = 0$ система (6.115) неустойчива — см. рис. 6.6, б).

Покажем теперь, что диссипативные силы могут разрушить устойчивость системы, находящейся под действием потенциальных и неконсервативных сил. Действительно, пусть выполнены условия (6.118). Тогда система (6.115) будет устойчива. Присоединим к этой системе диссипативные силы, положив $b_2 = 0$, и $b_1 = b > 0$. Тогда условие (6.121)

$$\Delta_3 = -b^2 p^2 < 0$$

принимает противоположный смысл, что свидетельствует о неустойчивости движения (см. примечание к условиям Гурвица (4.32)).

Из рассмотренного примера (6.115) с двумя степенями свободы видно, что при равенстве коэффициентов устойчивости c_1 и c_2 добавление любых неконсервативных позиционных сил py и $-px$ разрушает устойчивость потенциальной системы. Покажем, что это свойство справед-

ливо для системы с любым числом степеней свободы. Для этого рассмотрим устойчивую потенциальную систему с равными коэффициентами устойчивости

$$c_1 = c_2 = \dots = c_s = c.$$

Напомним, что для устойчивой потенциальной системы коэффициенты устойчивости равны квадратам частот собственных колебаний.

Теорема 3. *Если в устойчивую потенциальную систему с равными собственными частотами вводятся линейные неконсервативные силы, то устойчивость будет разрушена в не зависимости от нелинейных членов [38].*

Доказательство. Уравнение движения системы, на которую действуют линейные потенциальные и неконсервативные позиционные силы, возьмем в форме (6.45)

$$\ddot{z} + C_0 z + Pz = Z.$$

При равных коэффициентах устойчивости $C_0 = cE$, где E — единичная матрица, и последнее уравнение примет вид

$$\ddot{z} + cz + Pz = Z.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\det [E (\lambda^2 + c) + P] = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (6.106), если в последнем заменить λ^2 на $\lambda^2 + c$. Поэтому не равные нулю корни последнего уравнения относительно $\lambda^2 + c$ будут

$$\lambda^2 + c = \pm ai.$$

Отсюда

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + c^2} + c}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + c^2} - c}{2}} i.$$

Наличие корней с положительной вещественной частью служит доказательством теоремы.

Перейдем к рассмотрению устойчивости равновесия систем, находящихся под действием произвольных потенциальных и неконсервативных позиционных сил и линейных диссипативных сил с положительным сопротивлением, считая, что возмущенное движение определяется уравнением (6.50).

Теорема 4. *Если в положении неустойчивого равновесия консервативной системы потенциальная энергия $\Pi(q)$ имеет*

максимум, определенный наименьшими членами разложения ее в ряд по степеням q , то при добавлении произвольных неконсервативных позиционных сил и линейных диссипативных сил равновесие останется неустойчивым [38].

Доказательство. Уравнение возмущенного движения (6.50) в сделанных предположениях имеет вид

$$\frac{d}{dt}(A\dot{q}) = -\text{grad } \Pi + R(q) + B\dot{q}. \quad (6.123)$$

Здесь $R(q)$ — произвольная неконсервативная позиционная сила, B — постоянная неотрицательная, а $A(q)$ — определенно-положительная матрицы, $\Pi(q)$ — потенциальная энергия системы, имеющая при $q = 0$ максимум. Разложим потенциальную энергию в ряд по степеням q :

$$\Pi(q) = \Pi_m(q) + \dots, \quad (6.124)$$

где $\Pi_m(q)$ — однородная форма степени m , а точки означают совокупность членов, содержащих координаты в степени выше m . Так как по условию теоремы максимум потенциальной энергии $\Pi(q)$ определяется наименьшими членами разложения ее по степеням q , то однородная форма $\Pi_m(q)$ должна быть определенно-отрицательной функцией координат q , причем число m , конечно, четное.

Возьмем следующую функцию V ,

$$V = A\dot{q} \cdot q + \frac{1}{2} Bq \cdot q,$$

и вычислим ее производную по времени в силу уравнения возмущенного движения (6.123). Тогда, учитывая равенство (6.15), получим

$$\dot{V} = A\dot{q} \cdot \dot{q} - q \cdot \text{grad } \Pi.$$

На основании теоремы Эйлера об однородных функциях и равенства (6.124) будем иметь

$$q \cdot \text{grad } \Pi = \sum_{k=1}^s q_k \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = m\Pi_m(q) + \dots$$

Следовательно,

$$\dot{V} = A\dot{q} \cdot \dot{q} - m\Pi_m(q) + \dots$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет определенно-положительную функцию скоростей, а второе слагаемое — $m\Pi_m(q)$ — определенно-положительную функцию координат. Поэтому в окрестности нуля $q = 0$,

$\dot{q} = 0$ производная \dot{V} функции V будет определено-положительной функцией координат и скоростей. Так как сама функция V может принимать положительные значения (например, при $q = \dot{q}$), то доказательство теоремы является прямым следствием теоремы Ляпунова о неустойчивости движения (см. § 2.4).

Заметим, что условие, по которому определяется максимум потенциальной энергии, можно ослабить.

в. О б щ и й с л у ч а й. Перейдем к рассмотрению случая, когда на систему действуют линейные потенциальные, диссипативные, ускоряющие, гироскопические, неконсервативные позиционные и нелинейные силы. Уравнения возмущенного движения возьмем вначале в форме (6.46)

$$\ddot{z} + B_0\dot{z} + Gz + Cz + Pz = Z. \quad (6.125)$$

Составим характеристическое уравнение

$$\Delta = \det (E\lambda^2 + B_0\lambda + G\lambda + C + P) = 0 \quad (6.126)$$

или, более подробно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^2 + b_1\lambda + c_{11} & \dots & g_{1s}\lambda + c_{1s} + p_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{s1}\lambda + c_{s1} + p_{s1} & \dots & \lambda^2 + b_s\lambda + c_{ss} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель и сгруппируем члены по степеням λ :

$$\Delta = \lambda^{2s} + a_1\lambda^{2s-1} + \dots + a_{2s-1}\lambda + a_{2s} = 0. \quad (6.127)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + \dots + b_s = \text{Sp } B = \text{Sp } B_1, \\ a_{2s} &= \det (C + P) = \det C_1, \end{aligned} \quad (6.128)$$

где B_1 и C_1 — матрицы исходного непреобразованного уравнения (6.42).

Пользуясь этими равенствами, докажем теоремы, определяющие необходимые условия устойчивости движения.

Теорема 5. *Если ускоряющие силы доминируют над диссипативными, то система будет неустойчива при любых других линейных и нелинейных силах.*

Доказательство. В соответствии с определением доминирования диссипативных и ускоряющих сил будем иметь (см. § 6.3, с. 167)

$$\text{Sp } B_0 = \text{Sp } B = \text{Sp } B_1 < 0.$$

На основании первого равенства (6.128) коэффициент a_1 характеристического уравнения (6.127) будет отрицателен. Из этого следует, что среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один, вещественная часть которого положительна. Это доказывает теорему.

Теорема 6. *При отсутствии нелинейных членов ($Z = 0$) асимптотическую устойчивость нельзя осуществить без диссипативных сил.*

Доказательство. При отсутствии диссипативных сил $a_1 = 0$ и, следовательно, не выполнен критерий Гурвица, необходимый для асимптотической устойчивости линейной автономной системы.

Теорема 7. *Если определитель $|C_1| = |C + P|$ отрицателен, то система неустойчива при любых гироскопических, диссипативных и ускоряющих силах и вне зависимости от нелинейных членов Z .*

Доказательство. В условиях теоремы коэффициент a_2 характеристического уравнения (6.127) отрицателен (см. второе равенство (6.128)). Из этого следует, что хотя бы один корень уравнения (6.127) имеет положительную вещественную часть. Это доказывает теорему.

Следствие (см. первую теорему Томсона — Тета — Четаева § 6.5). Если неустойчивость изолированного положения равновесия потенциальной системы имеет нечетную степень, то стабилизировать равновесие нельзя никакими гироскопическими, диссипативными и ускоряющими силами.

Действительно, если система потенциальна, то $P = 0$ и при изолированном равновесии и нечетной степени неустойчивости $|C_1| = |C| < 0$ (см. § 6.4, с. 169).

Теорема 8. *Если линейная система не содержит потенциальных сил, то:*

1) *при нечетном числе координат асимптотическую устойчивость нельзя осуществить никакими гироскопическими, диссипативными и ускоряющими силами;*

2) *при четном числе координат для осуществления асимптотической устойчивости необходимо, помимо диссипативных сил, присоединить гироскопические силы [38].*

Доказательство. Если отсутствуют потенциальные силы и число координат нечетное, то $|C + P| = |P| \equiv 0$ (как кососимметричный определитель нечетного порядка). В этом случае, согласно (6.128), свободный член a_2 характеристического уравнения (6.127) равен нулю, что

служит признаком отсутствия асимптотической устойчивости (имеется нулевой корень).

Для доказательства второй части теоремы заметим, что присоединение диссипативных сил необходимо по теореме 6. Если же отсутствуют гироскопические силы, то система неустойчива (теорема 2).

Теорема 9. *Если потенциальная энергия системы имеет максимум, то:*

1) *при нечетном числе координат и любых нелинейных членах систему нельзя стабилизировать никакими гироскопическими, неконсервативно позиционными, ускоряющими и диссипативными силами;*

2) *при четном числе координат и при условии, что на систему действуют силы сопротивления с полной диссипацией, для стабилизации системы необходимо одновременно присоединить гироскопические и неконсервативно позиционные силы (вне зависимости от нелинейных членов) [38].*

Доказательство. Рассмотрим уравнение возмущенного движения в форме (6.45). Составим для него характеристическое уравнение

$$\Delta = \det (E\lambda^2 + B\lambda + G\lambda + C_0 + P) = 0.$$

Свободный член этого уравнения равен $a_{2s} = \det (C_0 + P)$.

При максимуме потенциальной энергии все элементы c_k , стоящие на главной диагонали матрицы C_0 , будут отрицательны. На основании соотношения (6.89) определитель $|C_0 + P|$ при нечетном числе координат отрицателен при любой кососимметрической матрице P . Следовательно, свободный член характеристического уравнения при нечетном числе координат отрицателен, и система на основании теоремы 7 неустойчива.

Рассмотрим теперь случай четного числа координат. Если отсутствуют неконсервативные позиционные силы, то система будет неустойчива на основании четвертой теоремы Томсона — Тета — Четаева § 6.5. Если же отсутствуют гироскопические силы, то неустойчивость системы следует из теоремы 4 этого параграфа. Таким образом, для стабилизации системы с четным числом координат необходимо присоединить одновременно гироскопические и неконсервативно позиционные силы. Теорема доказана полностью.

Проиллюстрируем доказанные теоремы сначала формальными примерами.

Пример 1. Система

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + g_1 \dot{x}_2 + g_2 \dot{x}_3 + p_1 x_2 + p_2 x_3 - c_1 x_1 &= X_1, \\ \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 - g_1 \dot{x}_1 + g_3 \dot{x}_3 - p_1 x_1 + p_3 x_3 - c_2 x_2 &= X_2, \\ \ddot{x}_3 + b_3 \dot{x}_3 - g_2 \dot{x}_1 - g_3 \dot{x}_2 - p_2 x_1 - p_3 x_2 - c_3 x_3 &= X_3\end{aligned}$$

при $c_k > 0$ неустойчива при любых $g_k, p_k, b_k > 0$ и X_k (так как потенциальная энергия $\Pi = -1/2 (c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2)$ имеет в положении равновесия $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ максимум и число координат нечетное — теорема 9).

Пример 2. Систему

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 - c_1 x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 - c_2 x_2 &= 0\end{aligned} \quad (b_k > 0, c_k > 0)$$

можно стабилизировать только в том случае, если подходящим образом присоединить одновременно гироскопические и неконсервативно позиционные силы (так как потенциальная энергия $\Pi = -1/2 (c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2)$ имеет в положении равновесия максимум, диссипация полная и число координат четное — теорема 9).

Пример 3. Система

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \dot{q}_1 + (1 + q_1^2 + q_2^2) q_1 q_2^3 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + \dot{q}_2 - (1 + q_1^2 + q_2^2) q_1^3 q_2^3 &= 0\end{aligned}$$

неустойчива, так как на нее действуют линейные силы сопротивления и неконсервативно позиционные (нелинейные) силы $P_1 = -(1 + q_1^2 + q_2^2) q_1 q_2^3$ и $P_2 = (1 + q_1^2 + q_2^2) q_1^3 q_2^3$ — теорема 2.

Пример 4. Система

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + 2\dot{q}_1 + 5\dot{q}_2 + \Gamma_1 + P_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} &= Q_1^{(2)}, \\ \ddot{q}_2 + 5\dot{q}_1 - 4\dot{q}_2 + \Gamma_2 + P_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} &= Q_2^{(2)}\end{aligned}$$

неустойчива при любых гироскопических Γ_k , неконсервативных позиционных P_k , потенциальных и нелинейных силах $Q_k^{(2)}$, так как след матрицы B отрицателен ($\text{Sp } B = 2 - 4 = -2$) и, следовательно, ускоряющие силы доминируют над диссипативными — теорема 5.

§ 6.9. Примеры исследования устойчивости движения систем с неконсервативными силами

Интересные и очень важные для техники задачи на исследование устойчивости систем с неконсервативными позиционными силами возникли в теории упругости. Здесь можно выделить три группы таких задач. Первая связана с упругими системами, подверженными действию так называемых следящих сил, т. е. сил, линия дей-

ствия которых совпадает с касательной к упругой оси стержня (см. пример 1). Такие силы могут возникнуть, в частности, при отделении продуктов сгорания реактивной установки. Е. Л. Николаи [41] в 1928 г., по-видимому, первый начал исследование таких систем. Вторая группа имеет дело с устойчивостью вращающихся валов, а третья — с устойчивостью упругих тел, движущихся в сопротивляющейся среде ¹⁾. Пример 2 дает некоторое представление об этих задачах.

Кроме систем, содержащих упругие тела, существуют различные устройства, в частности гироскопические (см. пример 3), в которых неконсервативные силы создаются с помощью специальных приспособлений (это делается, в частности, для ускорения переходных процессов).

Учитывая характер настоящей книги, мы можем рассмотреть только некоторые, наиболее простые задачи.

Пример 1. Модель упругого стержня, находящегося под действием следящей силы. Рассмотрим два однородных стержня длиной l_1 и l_2 , связанных шарниром и спиральной пружиной жесткости c_2 . Первый стержень может вращаться вокруг неподвижной опоры O , с которой он связан другой спиральной пружиной жесткости c_1 . Обе пружины находятся в недеформированном состоянии, когда стержни расположены по одной прямой (оси x — см. рис. 6.7). На второй

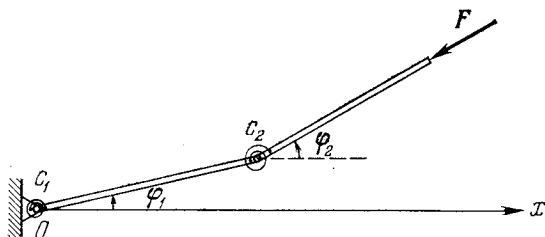


Рис. 6.7

стержень действует сила F , направленная всегда вдоль оси стержня (следящая сила). Эта система может рассматриваться как модель упругого стержня, находящегося под действием следящей силы.

Составим дифференциальные уравнения возмущенного движения. Кинетическая энергия системы обычными методами (при

¹⁾ См. книгу В. В. Болотина [11]. По первой проблеме подробный обзор методов и полученных результатов дан в статье Г. Херрманна [54].

подсчете кинетической энергии второго стержня используется теорема Кёнига) приводится к виду (выписаны члены только второго порядка малости)

$$T = 1/2 (a_{11}\dot{\varphi}_1^2 + 2a_{12}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + a_{22}\dot{\varphi}_2^2),$$

где

$$a_{11} = J_1 + m_2 l_1^2, \quad a_{12} = 1/2 m_2 l_1 l_2, \quad a_{22} = J_2 + 1/4 m_2 l_2^2.$$

Здесь J_1 — момент инерции первого стержня относительно оси вращения O , m_2 — масса второго стержня, J_2 — момент инерции второго стержня относительно его центра тяжести.

Потенциальная энергия пружин Π_1 определяется равенством

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2.$$

Найдем обобщенные силы Q'_1 и Q'_2 , отвечающие следящей силе F . При изменении одного угла φ_2 ($\varphi_1 = \text{const}$) работа силы F равна нулю. Поэтому

$$Q'_2 = 0.$$

Дадим теперь приращение $\delta\varphi_1$ углу φ_1 , оставив угол φ_2 без изменения, и вычислим работу $\delta A'_1$ силы F на этом виртуальном перемещении. Имеем

$$\delta A'_1 = -Fl_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \delta\varphi_1.$$

Отсюда для малых углов

$$Q'_1 = -Fl_1 (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Полные обобщенные силы, соответствующие углам φ_1 и φ_2 , найдем по формуле (для простоты считаем, что вся система расположена на гладкой горизонтальной плоскости, в результате чего силы тяжести исключены из рассмотрения)

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi_k} + Q'_k \quad (k = 1, 2).$$

Пользуясь найденными выражениями, получим

$$Q_1 = -e_1 \varphi_1 + e_2 \varphi_2, \quad Q_2 = c_2 \varphi_1 - c_2 \varphi_2,$$

где

$$e_1 = c_1 + c_2 - Fl_1, \quad e_2 = c_2 - Fl_1.$$

Применяя второй метод Лагранжа, составим уравнения возмущенного движения системы около положения равновесия:

$$a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 + e_1\varphi_1 - e_2\varphi_2 = \Phi_1,$$

$$a_{21}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 - c_2\varphi_1 + c_2\varphi_2 = \Phi_2.$$

Здесь Φ_1 и Φ_2 — неучтенные ранее члены, содержащие φ_1 и φ_2 в степени выше первой.

В этих уравнениях матрица коэффициентов

$$C_1 = \begin{vmatrix} e_1 & -e_2 \\ -c_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

при координатах φ_1 и φ_2 не симметрична. Разбивая ее на симметричную и кососимметричную части по формулам (6.5), найдем

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= e_1 = c_1 + c_2 - Fl_1, \\ c_{12} = c_{21} &= -\frac{e_2 + c_2}{2} = \frac{1}{2}(Fl_1 - 2c_2), \quad c_{22} = c_2, \\ \dot{p} &= -\frac{1}{2}(e_2 - c_2) = \frac{1}{2}Fl_1. \end{aligned}$$

Из этих выражений видно, что следящая сила F создает неконсервативные позиционные силы

$$P_1 = \frac{1}{2}Fl\varphi_2, \quad P_2 = -\frac{1}{2}Fl_1\varphi_1.$$

В потенциальную энергию всей системы

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}\varphi_1^2 + 2c_{12}\varphi_1\varphi_2 + c_{22}\varphi_2^2)$$

входят слагаемые, зависящие и от следящей силы (см. выражения для c_{kj}).

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + e_1 & a_{12}\lambda^2 - e_2 \\ a_{21}\lambda^2 - c_2 & a_{22}\lambda^2 + c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

или, раскрывая определитель,

$$a\lambda^4 + b\lambda^2 + c_0 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad b = a_{11}c_2 + a_{22}e_1 + a_{12}(e_2 + c_2), \\ c_0 &= c_2(e_1 - e_2) = c_1c_2. \end{aligned}$$

Рассматриваемая система будет устойчива в первом приближении, если все корни относительно λ^2 будут вещественными отрицательными числами. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$b > 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac_0 > 0 \quad (6.129)$$

($a > 0$ и $c_0 > 0$ при любых значениях следящей силы F). Из этих неравенств можно найти наименьшее значение следящей силы, при котором сохраняется устойчивость системы (легко проверить, что при отсутствии следящей силы система устойчива). Мы ограничимся рассмотрением простейшего случая идентичных стержней

и пружин. При $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$ и $c_1 = c_2 = c$ получим

$$a_{11} = \frac{4}{3} ml^2, \quad a_{12} = \frac{1}{2} ml^2, \quad a_{22} = \frac{1}{3} ml^2, \quad a = \frac{5}{3} m^2 l^4,$$

$$e_1 = 2c - Fl, \quad e_2 = c - Fl.$$

После подстановки в (6.129) получим

$$b = ml^2 \left(3c - \frac{5}{6} Fl \right) > 0,$$

$$\Delta = m^2 l^4 \left[\left(3c - \frac{5}{6} Fl \right)^2 - 4 \cdot \frac{5}{3} c^2 \right] > 0.$$

Отсюда находим, что рассматриваемая система будет устойчива в первом приближении при

$$F < \frac{6}{5} \left(3 - \sqrt{\frac{20}{3}} \right) \frac{c}{l} \approx 0,504 \frac{c}{l}.$$

Если модуль следящей силы будет больше этой величины, то второе неравенство (6.129) приобретает противоположный смысл и система сделается неустойчивой.

Пример 2. Неустойчивость ротора, вращающегося в аэродинамической среде. Как показывает опыт, вращающийся в кожухе ротор при наличии трения об аэродинамическую среду приобретает неустойчивое поперечное движение. Это явление, хорошо иллюстрирующее первую часть § 6.8, впервые исследовал П. Л. Капица [24].

На рис. 6.8 изображен ротор 1 массой M , вращающийся с угловой скоростью ω в кольцевом кожухе 2. Пространство между ротором и кожухом заполнено гидродинамической средой, например газом. Если центр O_1 ротора совпадает с центром O кожуха, то трение о газ вызовет только тормозящий момент, который не скажется на положении оси ротора. Покажем, что при смещении оси O_1 ротора возникают неконсервативные силы (мы пользуемся объяснением П. Л. Капицы; заметим только, что он не классифицировал силы по их структуре).

Пусть для примера центр O_1 ротора сместился вправо вдоль оси x на величину $OO_1 = x$. Газ в кожухе увлекается вращением ротора и приобретает скорости v_1 и v_2 . Так как зазор между кожухом и ротором в направлениидвига становится меньше, а количество газа в круговом движении постоянно, то $v_2 > v_1$. Поэтому трение поверхности ротора о газ не будет одинаковым с правой и с левой стороны; очевидно, что оно будет больше в тех частях его поверхности, где разность между периферийной скоростью ротора и газа больше. В сделанных предположениях о направлении смещения центра ротора левая его сторона будет испытывать большее трение о газ, чем правая, в результате чего появится сила

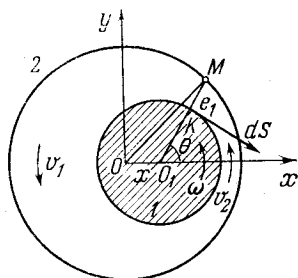


Рис. 6.8

S_y (кроме силы S_y , перпендикулярной смещению, возникают еще силы в направлении передвижения; эти силы, вызванные явлением Бернулли, малы и для простоты изложения нами не учитываются).

Вычисление силы S_y произведем в простейших предположениях, а именно: когда скорость газа велика и его движение можно принять полностью турбулентным; кроме того, предполагаем, что трение ротора от вязкости газа в первом приближении не зависит. Обозначим величину зазора между ротором и кожухом при совпадении их центров через e . Пусть центр ротора сместился по оси x на величину $OO_1 = x$. Проведем из точки O_1 прямую O_1M под углом θ к оси x . Величину зазора KM при смещенном положении ротора обозначим через e_1 (рис. 6.8). Из треугольника OMO_1 по теореме косинусов найдем (радиус кожуха OM , очевидно, равен $R + e$, где R — радиус ротора)

$$(R + e)^2 = x^2 + (R + e_1)^2 - 2x(R + e_1) \cos(\pi - \theta),$$

или, раскрывая скобки,

$$2Re + e^2 = x^2 + 2Re_1 + e_1^2 + 2Rx \cos \theta + 2xe_1 \cos \theta.$$

Считая величины x , e и, следовательно, e_1 малыми по сравнению с R , пренебрежем членами второго порядка малости:

$$2Re = 2Re_1 + 2Rx \cos \theta.$$

Отсюда

$$e_1 = e - x \cos \theta.$$

Среднюю скорость газа при несмещенном роторе принимают равной $R\omega/2$, т. е. половине скорости точек ротора, лежащих на его периферии. При смещении ротора скорость v газа в зазоре будет меняться, но количество газа, проходящего через любое сечение, равняется тому, которое было до перемещения ротора.

Следовательно,

$$ve_1 l = \frac{R\omega}{2} el,$$

где l — толщина ротора. Пользуясь выражением для e_1 и сокращая на l , получим

$$v(e - x \cos \theta) = \frac{R\omega}{2} e. \quad (6.130)$$

При больших скоростях сила трения dS , действующая на элемент наружной поверхности ротора $Rl d\theta$, будет приближенно пропорциональна квадрату относительной скорости $(R\omega - v)^2$ и плотности окружающей среды ρ . Сила эта направлена по касательной к ротору (см. рис. 6.8). Проектируя ее на ось y и интегрируя по θ от 0 до 2π , получим

$$S_y = -\kappa \rho Rl \int_0^{2\pi} (R\omega - v)^2 \cos \theta d\theta,$$

где κ — коэффициент трения.

Найдем скорость v из равенства (6.130) и внесем ее в это выражение для S_y :

$$S_y = -\kappa\rho R^3\omega^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{e}{2} \frac{1}{e - x \cos \theta}\right)^2 \cos \theta d\theta.$$

Будем считать, что смещение x мало по сравнению с величиной зазора e . Тогда, разлагая подынтегральное выражение в ряд по степеням x и ограничиваясь членами первого порядка малости, получим после очевидных преобразований

$$S_y = \frac{\pi\kappa\rho}{2} \cdot \frac{1R^3\omega^2}{e} x.$$

Аналогично получается составляющая S_x :

$$S_x = -\frac{\pi\kappa\rho}{2} \cdot \frac{1R^3\omega^2}{e} y.$$

К ротору, кроме сил трения S_x и S_y , приложена сила упругости F , проекции которой на оси координат будут $F_x = -cx$ и $F_y = -cy$, где c — коэффициент жесткости вала ротора на изгиб (на рис. 6.9 изображены силы S и F).

Пользуясь теоремой о движении центра масс, составим дифференциальные уравнения движения точки O_1 :

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= F_x + S_x + X, \\ M\ddot{y} &= F_y + S_y + Y. \end{aligned}$$

Здесь X и Y — неучтенные нелинейные члены, содержащие x , y и \dot{x} , \dot{y} в степени выше первой.

Внесем значения F_x , F_y , S_x и S_y , разделим на массу ротора M и перенесем часть членов в левые части уравнений. Тогда, введя обозначения

$$k^2 = \frac{c}{M}, \quad p = \frac{\pi\kappa\rho}{2} \cdot \frac{1R^3\omega^2}{eM},$$

получим

$$\ddot{x} + k^2x - py = X, \quad \ddot{y} + k^2y + px = Y. \quad (6.131)$$

В этих уравнениях слагаемые k^2x и k^2y , полученные от упругой силы F , представляют потенциальные силы, слагаемые $-py$ и px (проекция главного вектора S сил трения, взятые с обратным знаком и отнесенные к единице массы) — неконсервативные силы, X и Y — нелинейные члены.

Левые части уравнений (6.131) совпадают с уравнениями (6.115). Для последних было показано, что при равенстве коэффициентов c_1 и c_2 (в данном примере $c_1 = c_2 = k^2$), движение неустойчиво при любых значениях $p \neq 0$ и любых нелинейных членах. Поэтому при отсутствии демпфирования поперечное движение оси

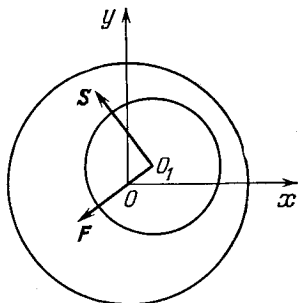


Рис. 6.9

ротора, вращающегося в гидродинамической среде, всегда неустойчиво.

Ограничиваясь случаем $X = Y = 0$, рассмотрим характер неустойчивого движения более подробно. Для этого умножим второе уравнение (6.131) на $i = \sqrt{-1}$ и сложим почленно оба уравнения:

$$\ddot{x} + i\dot{y} + k^2(x + iy) + p(ix - y) = 0$$

или

$$\ddot{z} + (k^2 + ip)z = 0, \quad (6.132)$$

где комплексная переменная z определена равенством

$$z = x + iy.$$

Решение уравнения (6.132) будем искать в обычной форме:

$$z = Ae^{\lambda t},$$

где A — некоторое комплексное число. Внося $z = Ae^{\lambda t}$ в уравнение (6.132), получаем

$$[\lambda^2 + (k^2 + ip)] Ae^{\lambda t} = 0.$$

Отсюда

$$\lambda^2 = -k^2 - ip.$$

Будем считать, что $p \ll k^2$. Тогда, извлекая корень из комплексного числа $-k^2 - ip$, находим с точностью до p^2/k^4

$$\lambda_1 = \frac{p}{2k} - ki, \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2k} + ki.$$

Общее решение уравнения (6.132) примет вид

$$z = Ae^{\frac{p}{2k}t} e^{-ikt} + Be^{-\frac{p}{2k}t} e^{ikt},$$

где A и B — произвольные постоянные интегрирования.

Второе слагаемое быстро убывает по модулю, поэтому, пренебрегая им, получим

$$z = Ae^{\frac{p}{2k}t} e^{-ikt}.$$

По своему определению z является комплексной координатой точки O_1 . Связь между полярными координатами r и φ точки O_1 и переменной z определяется равенствами

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

Следовательно,

$$r = |A| e^{\frac{p}{2k}t}, \quad \varphi = kt.$$

Таким образом, точка O_1 движется по логарифмической спирали, а положение равновесия центра ротора является неустойчивым фокусом. На рис. 6.10 приведена фотография, заимство-

ванная из работы [24], на которой воспроизведена траектория точки O_1 , полученная П. Л. Капицей при постановке эксперимента.

Для стабилизации поперечного движения оси ротора устанавливается кольцевой демпфер, создающий силы сопротивления,

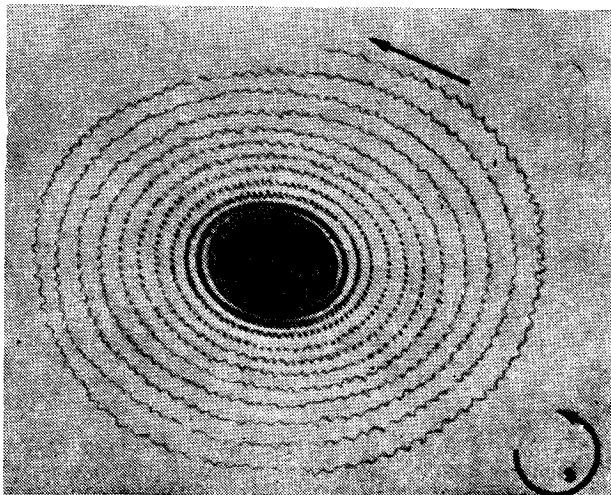


Рис. 6.10

пропорциональные скоростям с одинаковым коэффициентом демпфирования $b_1 = Mb$. Уравнения движения (6.131) принимают вид

$$\ddot{x} + b\dot{x} + k^2x - py = X,$$

$$\ddot{y} + b\dot{y} + k^2y + px = Y.$$

Пользуясь условием асимптотической устойчивости (6.122), получим

$$b > p/k.$$

Это неравенство определяет основное требование, предъявляемое к демпферу.

Пример 3. Гироскоп с радиальной коррекцией. В авиации широкое распространение получили гироскопы с радиальной коррекцией. Прибор устроен следующим образом. Гироскоп (на рис. 6.11 он не показан) помещен в кожух I . На кожухе установлены два уровня 1 и 2 , заполненных токопроводящей жидкостью¹⁾. При отклонении оси гироскопа от вертикали ζ в уровнях создается разность потенциалов, которая усиливается специальным устройством и подается на датчики моментов D_1 и

¹⁾ Вместо двух линейных уровней, как правило, устанавливают один шаровой уровень. Тот же эффект в конструкциях более старого выпуска создавался с помощью струй воздуха.

D_2 . Уровень 1 управляет датчиком D_1 , а уровень 2 — датчиком D_2 . При повороте внешнего кольца карданова подвеса на угол α датчик D_2 создает момент $L_x = -\kappa\alpha$ (для малых углов), а при повороте кожуха на угол β датчик D_1 создает момент $L_\eta = \kappa\beta$, где κ —

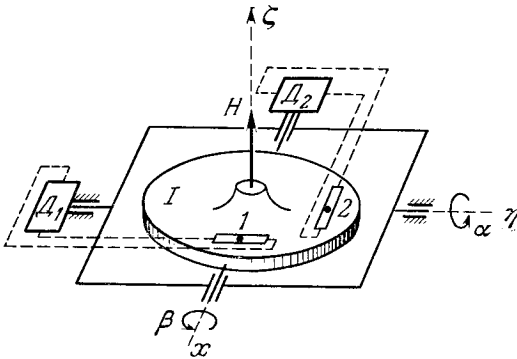


Рис. 6.11

крутизна характеристики датчиков моментов. Центр тяжести системы совпадает с точкой пересечения осей карданова подвеса.

Пользуясь теоремой моментов или уравнениями Лагранжа, легко получить дифференциальные уравнения движения оси гироскопика (массой подвеса пренебрегаем)

$$J\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} - H\dot{\beta} - \kappa\beta = X_1,$$

$$J\ddot{\beta} + b\dot{\beta} + H\dot{\alpha} + \kappa\alpha = X_2.$$

В этих уравнениях J — экваториальный момент инерции гироскопа, H — его кинетический момент, b — коэффициент сил сопротивления, X_1 и X_2 — члены, содержащие α , β , $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ в степени выше первой.

Силы $-H\dot{\beta}$ и $H\dot{\alpha}$ — гироскопические, а $-\kappa\beta$ и $\kappa\alpha$ — неконсервативные (в гироскопии их называют силами *радиальной коррекции*).

Составим характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} J\lambda^2 + b\lambda & -H\lambda - \kappa \\ H\lambda + \kappa & J\lambda^2 + b\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или, раскрывая определитель,

$$J^2\lambda^4 + 2Jb\lambda^3 + (H^2 + b^2)\lambda^2 + 2\kappa H\lambda + \kappa^2 = 0.$$

Так как все коэффициенты этого уравнения положительны, то критерий Гурвица (4.32) сводится к одному неравенству

$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0.$$

Внесем сюда значения коэффициентов и преобразуем полученное выражение. Получим

$$\Delta_3 = 4\kappa J (H^2 + b^2) (bH - \kappa J) > 0. \quad (6.133)$$

При отсутствии сил сопротивления ($b = 0$) это условие имеет противоположный смысл ($\Delta_3 < 0$), что свидетельствует о неустойчивости системы. Из неравенства (6.133) найдем значение коэффициента демпфирования, при котором имеет место асимптотическая устойчивость:

$$b > \kappa J / H.$$

Отметим, что кинетический момент H гироскопа очень велик по сравнению с κJ . Поэтому нижняя граница для коэффициента демпфирования очень мала. Практически для асимптотической устойчивости достаточно естественных сил сопротивления воздуха, трения в опорах и т. п.

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

§ 7.1. Функции Ляпунова для неавтономных систем.
Обобщенный критерий Сильвестра

Прежде чем перейти к определению функций Ляпунова для неавтономных систем, остановимся кратко на некоторых общих вопросах прямого метода.

Об устойчивости движения мы судим по отклонению в пространстве x_1, \dots, x_n изображающей точки M от начала координат O (см. § 1.1). В свою очередь (см. § 2.1), в прямом методе Ляпунова для автономных систем близость изображающей точки M к началу координат определяется по модулю знакоопределенной функции V : если величина $|V(x)|$ мала, то в силу непрерывности функции $V(x)$ точка M будет близка к началу координат. Картина изменится, если функция V будет зависеть явно не только от вариаций x_1, \dots, x_n , но и от времени t . В этом случае знакоопределенная функция $V(x, t)$ в обычном понимании может сделаться достаточно малой по модулю не за счет близости точки M к началу координат O , а за счет изменения времени t . Действительно, функция

$$V(x, t) = e^{-t} (x_1^2 + x_2^2)$$

в обычном смысле определенно-положительна: при всех значениях x_1 и x_2 , не обращающихся в нуль одновременно, она положительна и в нуль обращается только в том случае, если $x_1 = x_2 = 0$. Однако судить о близости изображающей точки M к началу координат по этой функции нельзя, так как с течением времени t за счет уменьшения множителя e^{-t} она делается и в дальнейшем будет оставаться меньше любого наперед заданного положительного числа ε при любых конечных значениях x_1 и x_2 . В связи с этим функции V , зависящие явно от времени t , требуют дополнительных определений (читателю полезно еще раз посмотреть § 2.1).

Предполагается, что вещественные функции $V(x, t)$ определены для всех вещественных значений t и

x_1, \dots, x_n , подчиненных условиям

$$t \geq t_0, \quad \sum x_j^2 \leq \mu, \quad (7.1)$$

где t_0 и μ — постоянные ($t_0 \geq 0, \mu > 0$), причем μ может быть мало. Считается, что в области (7.1) эти функции непрерывны, однозначны и обращаются в нуль, когда все x_k равны нулю:

$$V(0, t) = 0. \quad (7.2)$$

Если при условиях (7.1), при t_0 достаточно большом а μ достаточно малом, рассматриваемая функция V принимает кроме нулевых значения только одного знака, то такую функцию называют *знакопостоянной*. Если хотят отметить ее знак, то говорят, что она положительна или отрицательна.

Функция V , зависящая явно от t , называется *определенно-положительной*, если существует такая не зависящая от t *определенно-положительная* функция $W(x)$, что в области (7.1) при достаточно малом μ и достаточно большом t_0 будет

$$V(x, t) \geq W(x), \quad (7.3)$$

и называется *определенно-отрицательной*, если при тех же условиях будем иметь

$$-V(x, t) \geq W(x).$$

Из соотношения (7.3) следует, что для *определенно-положительной* функции $V(x, t)$ разность $V(x, t) - W(x)$ представляет функцию *положительную*.

Требование существования граничной функции $W(x)$ для *определенно-положительной* функции $V(x, t)$, зависящей явно от времени t , можно проиллюстрировать геометрическими соображениями. В пространстве V, x_1, \dots, x_n построим поверхность $W = W(x)$ и при фиксированном значении времени t поверхность $V = V(x, t)$. При изменении t поверхность $V(x, t)$ будет деформироваться, но при этом она не должна опуститься ниже граничной поверхности $W = W(x)$ (рис. 7.1).

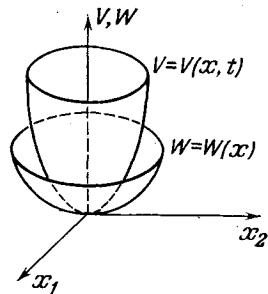
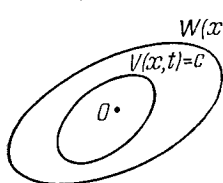


Рис. 7.1

Точно так же, если в пространстве x_1, \dots, x_n построить две замкнутые поверхности $W(x) = c$ и $V(x, t) = c$ (последняя для фиксированного t), то при изменении t



поверхность $V(x, t) = c$ будет деформироваться, но она не должна выйти наружу поверхности $W(x) = c$ (рис. 7.2). Прежде чем перейти к дальнейшим определениям, рассмотрим, по каким признакам можно в некоторых случаях определить знакоопределенность функции $V(x, t)$ в смысле Ляпунова. Предположим, что функция $V(x, t)$ имеет вид квадратичной формы

Рис. 7.2

$$V(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} x_k x_j, \quad (7.4)$$

где α_{kj} — некоторые функции времени t и переменных x_i :

$$\alpha_{kj} = \alpha_{kj}(x, t).$$

Если в области (7.1) при t_0 достаточно большом, а μ достаточно малом все главные диагональные миноры матрицы

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}(x, t) & \dots & \alpha_{1n}(x, t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}(x, t) & \dots & \alpha_{nn}(x, t) \end{vmatrix}$$

удовлетворяют обобщенному условию Сильвестра

$$\Delta_1 = \alpha_{11} \geq \delta_1 > 0, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \geq \delta_n > 0, \quad (7.5)$$

где $\delta_1, \dots, \delta_n$ — некоторые положительные постоянные, то функция $V(x, t)$, определяемая равенством (7.4), будет определено-положительной в смысле Ляпунова. Действительно, так как все миноры $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ положительны, то функция $V(x, t)$ определено-положительна в обычном смысле. За ограничивающую функцию $W(x)$ можно выбрать, в частности, функцию

$$W(x) = \frac{1}{2} \varepsilon (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2), \quad (7.6)$$

где ε — некоторое положительное число. Покажем, что число ε можно выбрать так, что функция $V - W$ будет

положительной. Для этого рассмотрим миноры матрицы функции $V - W$:

$$\Delta_k^*(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \varepsilon & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \varepsilon & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} - \varepsilon \end{vmatrix}.$$

При $\varepsilon = 0$ все Δ_k^* будут совпадать с минорами Δ_k и, следовательно, они положительны ($\Delta_k^*(0) = \Delta_k \geq \delta_k > 0$). В силу непрерывной зависимости миноров $\Delta_k^*(\varepsilon)$ от параметра ε можно утверждать, что всегда найдется достаточно малое положительное число ε , при котором все $\Delta_k^*(\varepsilon)$ будут также положительны. Из этого следует, что функция $V - W$ положительна, что свидетельствует о справедливости обобщенного критерия Сильвестра.

Для определенно-отрицательной функции V , имеющей вид квадратичной формы (7.4), обобщенный критерий Сильвестра имеет вид

$$\Delta_1 \leq -\delta_1 < 0, \Delta_2 \geq \delta_2 > 0, \Delta_3 \leq -\delta_3 < 0, \dots, \quad (7.7)$$

где $\delta_1, \delta_2, \dots$ — положительные числа.

Поясним обобщенный критерий Сильвестра примерами.

1. Рассмотрим функцию

$$V(x, t) = t(x_1^2 + x_2^2) - 2 \cos t \cdot x_1 x_2.$$

Составим матрицу коэффициентов

$$\begin{vmatrix} t & -\cos t \\ -\cos t & t \end{vmatrix}$$

и главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = t, \Delta_2 = t^2 - \cos^2 t.$$

Если положить $t_0 = 1$, то при всех $t \geq 1$ будем иметь ¹⁾

$$\Delta_1 \geq 1 > 0, \Delta_2 \geq 1 - \cos^2 1 \approx 0,71 > 0.$$

Обобщенный критерий Сильвестра (7.5) выполнен, следовательно, рассматриваемая функция определенно-положительна в смысле Ляпунова.

2. Матрица коэффициентов для функции

$$V(x, t) = \{1 - a \cos [(x_1^2 + x_2^2)t]\} x_1^2 + 2a \sin [(x_1^2 + x_2^2)t] x_1 x_2 + \\ + \{1 + a \cos [(x_1^2 + x_2^2)t]\} x_2^2$$

¹⁾ Имеем $d\Delta_2/dt = 2t + \sin 2t \geq 0$, причем знак равенства имеет место только при $t = 0$ (так как $x > \sin x$ при $x > 0$). Следовательно, $\Delta_2(t)$ при $t > 0$ неограниченно возрастает.

имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 - a \cos [(x_1^2 + x_2^2) t] & a \sin [(x_1^2 + x_2^2) t] \\ a \sin [(x_1^2 + x_2^2) t] & 1 + a \cos [(x_1^2 + x_2^2) t] \end{array} \right\|.$$

Составим главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = 1 - a \cos [(x_1^2 + x_2^2)t], \quad \Delta_2 = 1 - a^2.$$

Очевидно, что при любых t , x_1 , x_2 будем иметь $\Delta_1 \geq 1 - |a|$, $\Delta_2 = 1 - a^2$. Отсюда следует, что при $|a| < 1$ рассматриваемая функция будет определенно-положительной в смысле Ляпунова.

Вернемся к дальнейшим определениям.

Если при условиях (7.1) значения $|V|$ не превосходят некоторого конечного положительного числа, то функция V называется *ограниченной*. При достаточно малом значении μ такой будет в силу непрерывности всякая не зависящая от t функция V .

Если ограниченная функция V такова, что для всякого положительного l , как бы мало оно ни было выбрано, найдется такое отличное от нуля положительное число δ , что при

$$t \geq t_0, \quad \sum x_k^2 \leq \delta \quad (7.8)$$

будет выполняться неравенство

$$|V| < l, \quad (7.9)$$

то говорят, что функция V допускает *бесконечно малый высший предел*. Грубо говоря, смысл бесконечно малого высшего предела состоит в том, что модуль функции $V(x, t)$ можно сделать сколь угодно малым при любом $t \geq t_0$ только за счет уменьшения модулей всех x_j .

В силу непрерывности бесконечно малый высший предел имеет всякая не зависящая от t функция V . Но функции, зависящие от t , хотя бы и ограниченные, могут не иметь его.

В качестве примера рассмотрим три функции:

$$\sin^2 [(x_1^2 + \dots + x_n^2)t]; \quad (x_1^2 + \dots + x_n^2)\sin^2 t; \quad t(x_1^2 + x_2^2) - 2 \cos t \cdot x_1 x_2.$$

Первые две функции ограничены и положительны, но только вторая из них допускает бесконечно малый высший предел. Заметим, что ни одна из этих двух функций не является знакоопределенной (так как при бесчисленных значениях t они могут обратиться

в нуль). Третья функция определенно-положительна, но она неограничена и, следовательно, не имеет бесконечно малого высшего предела.

В заключение этого параграфа отметим, что полная производная функции $V(x, t)$ по времени t , взятая в предположении, что переменные x_j удовлетворяют дифференциальным уравнениям возмущенного движения (1.16), вычисляется по формуле

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (7.10)$$

Читателю полезно сравнить это выражение с равенством (2.12).

§ 7.2. Основные теоремы прямого метода для неавтономных систем

Основные теоремы прямого метода для неавтономных систем читаются и доказываются почти так же, как и соответствующие теоремы для автономных систем. Поэтому мы приведем сразу все основные теоремы и докажем только одну из них.

Теорема Ляпунова об устойчивости движения. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V , производная которой \dot{V} в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V , допускающую бесконечно малый высший предел, производная которой \dot{V} в силу этих уравнений была бы знакоопределенной функцией противоположного знака с V , то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Первая теорема Ляпунова о неустойчивости движения. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти функцию V , допускающую бесконечно малый высший предел, производная которой \dot{V} в силу этих уравнений есть функция знакоопределенная, а сама функция V в окрестности нуля переменных x_k и при всех $t \geq t_0$, где t_0 сколь угодно велико, может принимать зна-*

чения того же знака, что и производная, то невозмущенное движение неустойчиво.

Прежде чем перейти к теореме Четаева о неустойчивости движения, необходимо дать дополнительное определение области $V > 0$ (см. § 2.4). Совокупность значений переменных x_k , удовлетворяющих в области (7.1) неравенству $V(x, t) > 0$, называется областью $V > 0$, а поверхность $V(x, t) = 0$ — границей последней. Для функции $V(x, t)$, зависящей явно от t , граница области $V > 0$ и сама область изменяются с течением времени t . Может оказаться, что область $V(x, t) > 0$, изменяясь с течением времени, перестанет существовать.

Функция $U(x, t)$ называется определенно-положительной в области $V > 0$, если для произвольного положительного числа ε , как бы мало оно ни было выбрано, найдется такое положительное число l , что при всех x_k , удовлетворяющих условию $V \geq \varepsilon$, и для всякого $t \geq t_0$ имеет место неравенство $U(x, t) \geq l$.

Теорема Четаева о неустойчивости движения. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что можно найти функцию V , ограниченную в области $V > 0$, существующей в сколь угодно малой окрестности нуля переменных x_k при всех $t \geq t_0$, производная которой \dot{V} в силу этих уравнений была бы определенно-положительной функцией в области $V > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Докажем для примера теорему Ляпунова об устойчивости движения (доказательство других теорем можно найти, например, в [35, 49, 37]).

Пусть V — определенно-положительная функция, а $\dot{V} \leq 0$. По определению знакоопределенной функции, найдется такая не зависящая от t определенно-положительная функция W , что при достаточно большом t_0 и достаточно малом μ в области (7.1) будут иметь место неравенства

$$\dot{V} \leq 0, V(x, t) \geq W(x). \quad (7.11)$$

Выберем произвольно малое положительное число ε (конечно, $\varepsilon \leq \mu$). На сфере ε пространства x_k (рис. 7.3)

$$\sum_k x_k^2 = \varepsilon \quad (7.12)$$

значения функции $W(x)$ отличны от нуля (так как функция W определенно-положительная и обращается в нуль

только в начале координат O). Поэтому точная нижняя граница l функции W на сфере ε положительна и не может равняться нулю. Согласно определению точной нижней границы на поверхности сферы ε будет иметь место неравенство

$$W_\varepsilon(x) \geq l.$$

Пользуясь теперь вторым условием (7.11), найдем, что в любой точке сферы ε функция $V(x, t)$ не меньше l :

$$V_\varepsilon(x, t) \geq l. \quad (7.13)$$

Рассмотрим функцию $V(x, t)$ при фиксированном значении времени $t=t_0$, т. е. функцию $V(x, t_0)$. Эта функция не зависит от t и при $x=0$ она обращается в нуль. В силу непрерывности этой функции по числу l найдется такое число $\delta > 0$, что для всех точек, находящихся внутри или на поверхности сферы δ ,

$$\sum x_k^2 = \delta,$$

значения функции $V(x, t_0)$ будут удовлетворять неравенству

$$V(x, t_0) < l. \quad (7.14)$$

Покажем, что изображающая точка M , начав движение из сферы δ , никогда не дойдет до сферы ε . Действительно, так как начальная точка M_0 берется из сферы δ , то значение функции $V(x_0, t_0)$ в этой точке должно удовлетворять неравенству (7.14):

$$V_0 = V(x_0, t_0) < l. \quad (7.15)$$

Воспользуемся очевидным равенством

$$V - V_0 = \int_{t_0}^t \dot{V} dt$$

или, принимая во внимание соотношения (7.11) и (7.15),

$$V \leq V_0 < l. \quad (7.16)$$

Это неравенство выполняется в течение всего времени движения. Следовательно, изображающая точка M , начав движение из положения M_0 , находящегося в сфере δ ,

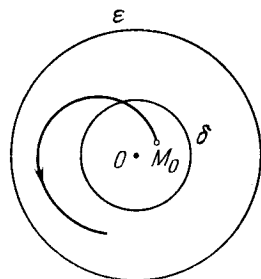


Рис. 7.3

никогда не дойдет до сферы ε (так как на сфере ε , согласно неравенству (7.13), функция $V_\varepsilon(x, t) \geq l$). Теорема доказана.

Из приведенного доказательства, принадлежащего А. М. Ляпунову, виден метод, с помощью которого по выбранному ε можно найти число δ . Действительно, зная ε , нужно найти на сфере ε точную нижнюю границу l функции $W(x)$ (если функция V не зависит от времени t явно, то точную нижнюю границу функции $V(x)$). Число δ найдется теперь из неравенства (7.14) (подробнее об этом см. статью Н. Г. Четаева, перепечатанную в книге [49]).

Закончим изложение общих теорем прямого метода Ляпунова следующим замечанием. Во всех теоремах этого метода можно определить характер устойчивости движения только после того, как найдена функция Ляпунова, удовлетворяющая определенным условиям. Естественно возникает вопрос об обратимости этого метода. Иначе говоря, можно ли утверждать, что для всякого устойчивого (неустойчивого) движения имеется соответствующая функция Ляпунова. Исследованием этой проблемы занимались многие ученые. Подробное изложение, основные результаты и историю вопроса можно найти в книге Н. Н. Красовского [27].

§ 7.3. Примеры построения функции Ляпунова для неавтономных систем

Пример 1. Устойчивость движения гироскопа в горизонтальном компасе. Чувствительный элемент гироскоп-компас состоит из двух идентичных гироскопов 1 и 2, установленных в сфере и соединенных между собой (рис. 7.4). А. Ю. Ишлинский в своей работе [22] показал, что если на гироскопы подавать управляющий момент

$$N = -\frac{4B^2}{mIR} \cos \varepsilon \sin \varepsilon,$$

где ε — угол отклонения осей гироскопов от оси S — N гиросферы, m — ее масса, B — кинетический момент гироскопа, l — расстояние от точки подвеса O гиросферы до ее центра тяжести, R — радиус Земли, принимаемой за шар, то в установившемся движении чувствительный элемент будет показывать плоскость горизонта и плоскость меридиана при любом движении по поверхности Земли корабля, на котором установлен прибор.

Восточная составляющая V_E скорости корабля относительно Земли при плавании в не очень высоких широтах меньше переносной скорости $RU \cos \varphi$, где U — угловая скорость вращения

Земли, а φ — широта места плавания. Поэтому

$$|V_E| < RU \cos \varphi. \quad (7.17)$$

Уравнения возмущенного движения системы в упрощающих, но вполне оправданных предположениях имеют вид (вывод можно найти в упомянутой работе А. Ю. Ишлинского)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{v\alpha}{\sqrt{gR}} - v\beta - \omega \frac{2B \sin \sigma}{ml\sqrt{gR}} \delta &= 0, \\ \frac{d\beta}{dt} + v \frac{v}{\sqrt{gR}} \alpha - \omega\gamma &= 0, \\ \frac{d\gamma}{dt} + \omega\beta + v \frac{2B \sin \sigma}{ml\sqrt{gR}} \delta &= 0, \quad (7.18) \\ \frac{d}{dt} \frac{2B \sin \sigma \cdot \delta}{ml\sqrt{gR}} + \omega \frac{v}{\sqrt{gR}} \alpha - v\gamma &= 0. \end{aligned}$$

В этих уравнениях $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — координаты системы, определяющие ее положение в возмущенном движении, $v(t)$ — абсолютная скорость точки O , причем

$$v^2 = (RU \cos \varphi + V_E)^2 + V_N^2, \quad (7.19)$$

где V_N — северная составляющая скорости точки O относительно Земли, $\omega(t)$ — вертикальная составляющая угловой скорости трехгранника Дарбу, относительно которого определяется положение гиросферы, $\sigma(t)$ — значение угла ε в установившемся движении, $v = \sqrt{g/R}$ — частота, соответствующая периоду Шулера, g — ускорение силы тяжести. Отметим, что $v(t), \omega(t)$ и $\sigma(t)$ — заданные функции времени, причем по своему физическому смыслу $\sigma(t) \geq \sigma_0 = \min \sigma > 0$.

Умножим первое уравнение (7.18) на $v\alpha/\sqrt{gR}$, второе на β , третье на γ и четвертое на $2B \sin \sigma \cdot \delta/ml\sqrt{gR}$ и сложим почленно все уравнения. Тогда после очевидных упрощений получим

$$\frac{v\alpha}{\sqrt{gR}} \frac{d}{dt} \frac{v\alpha}{\sqrt{gR}} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} + \frac{2B \sin \sigma \cdot \delta}{ml\sqrt{gR}} \frac{d}{dt} \frac{2B \sin \sigma \cdot \delta}{ml\sqrt{gR}} = 0$$

или, интегрируя,

$$V = \frac{v^2}{gR} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \frac{4B^2 \sin^2 \sigma}{m^2 l^2 gR} \delta^2 = \text{const}. \quad (7.20)$$

Из соотношений (7.17) и (7.19) следует

$$v^2(t) \geq (RU \cos \varphi - \max |V_E|)^2 > 0.$$

Кроме того, из условия $\sigma(t) \geq \sigma_0 > 0$ вытекает, что $\sin^2 \sigma(t) \geq \sin^2 \sigma_0 > 0$. Эти неравенства означают, что выполнен обобщенный критерий Сильвестра (7.5) и, следовательно, функция V является определенно-положительной в смысле Ляпунова. Полная

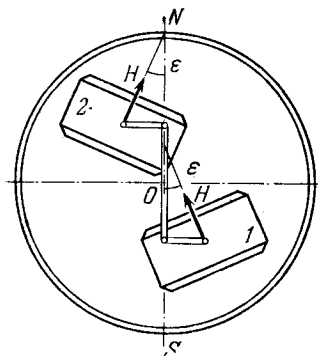


Рис. 7.4

где положительные вещественные функции α и β вещественных переменных t, x, \dot{x} определены в области

$$t \geq t_0, \quad x^2 + \dot{x}^2 \leq \mu \quad (7.24)$$

(t_0, μ — некоторые положительные постоянные).

Функцию $\alpha(t, x, \dot{x})$ можно трактовать как нелинейный, зависящий явно от времени обобщенный коэффициент демпфирования, а функцию $\beta(t, x, \dot{x})$ — как нелинейную, зависящую явно от времени обобщенную жесткость системы.

При любых, но постоянных и положительных коэффициентах α и β невозмущенное движение $x = 0, \dot{x} = 0$ асимптотически устойчиво. Если же эти коэффициенты, оставаясь положительными, изменяются, то существуют режимы их изменения, при которых движение становится неустойчивым. В тех случаях, когда закон изменения коэффициентов α и β известен, можно применить тот или иной метод и исследовать устойчивость движения. Однако в приложениях встречаются случаи, когда характер функций α и β не определен и известны только границы их изменения в области (7.24)

$$a \leq \alpha(t, x, \dot{x}) \leq A, \quad b \leq \beta(t, x, \dot{x}) \leq B, \quad (7.25)$$

где a, A, b, B — заданные положительные числа (случай $a = 0$ или $b = 0$ считаем исключенным).

Поэтому представляет интерес определить условия для a, A, b, B , при выполнении которых невозмущенное движение $x = 0, \dot{x} = 0$ будет асимптотически устойчиво при любых законах изменения функций α и β в заданных границах. (Считая, что функции α и β изменяются произвольным образом, мы предполагаем, конечно, что для всех t, x, \dot{x} из области (7.24) они удовлетворяют условиям существования и единственности решения уравнения (7.23).)

Заметим прежде всего, что условие $a > 0, b > 0$ необходимо. Действительно, если, например, $b \leq 0$, то, пользуясь произвольностью α и β , полагаем $\alpha = \text{const}$, $\beta = b \leq 0$. При этих значениях α и β движение неустойчиво при $b < 0$ и устойчиво, но не асимптотически при $b = 0$ и $\alpha = \text{const} > 0$.

Перейдем к рассмотрению поставленной задачи. С помощью подстановки

$$x = x_1, \quad \dot{x} = Cx_1 + Dx_2, \quad (7.26)$$

где C и D — некоторые постоянные, которыми мы распорядимся в дальнейшем соответствующим образом, заменим уравнение (7.23) эквивалентной системой

$$\dot{x}_1 = Cx_1 + Dx_2, \quad \dot{x}_2 = \gamma x_1 + \delta x_2. \quad (7.27)$$

В этих уравнениях функции γ и δ определены равенствами

$$\gamma = -\frac{C(\alpha + C) + \beta}{D}, \quad \delta = -(\alpha + C). \quad (7.28)$$

Очевидно, что из асимптотической устойчивости относительно переменных x_1 и x_2 следует асимптотическая устойчивость относительно x и \dot{x} , и наоборот.

Возьмем функцию V в следующей форме:

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \quad (7.29)$$

Полная производная по времени функции V , вычисленная в силу уравнений (7.27), после очевидных преобразований приводится к виду

$$\dot{V} = Cx_1^2 + (D + \gamma)x_1x_2 + \delta x_2^2. \quad (7.30)$$

Функция V определенно-положительная. Если нам удастся подобрать такие постоянные два числа C и D , при которых производная \dot{V} будет определенно-отрицательной функцией в смысле Ляпунова, то невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво. Составим матрицу коэффициентов функции \dot{V} :

$$\begin{vmatrix} C & \frac{1}{2}(D + \gamma) \\ \frac{1}{2}(D + \gamma) & \delta \end{vmatrix}$$

и подчиним главные диагональные миноры обобщенному критерию Сильвестра (7.7)

$$\Delta_1 = C \leq -\eta < 0, \quad \Delta_2 = C\delta - \frac{1}{4}(D + \gamma)^2 \geq \nu > 0, \quad (7.31)$$

где η и ν — сколь угодно малые положительные постоянные числа.

Положив $C = -a_1$, где $a_1 = \text{const} > 0$, мы выполним первое условие (7.31), если потребуем, чтобы число

a_1 удовлетворяло дополнительному условию

$$0 < \eta < a_1 < a = \inf \alpha. \quad (7.32)$$

Пользуясь равенствами (7.28), приведем второе условие (7.31) к виду

$$F(D) = D^4 - 2(E + \beta - 2\nu)D^2 + (E - \beta)^2 \leq 0, \quad (7.33)$$

где функция

$$E(t, x, \dot{x}) = a_1 [\alpha(t, x, \dot{x}) - a_1] \quad (7.34)$$

на основании (7.32) принимает только положительные значения.

Составим уравнение

$$F(D) = D^4 - 2(E + \beta - 2\nu)D^2 + (E - \beta)^2 = 0. \quad (7.35)$$

Постоянное положительное число ν во втором условии (7.31) может быть сколь угодно малым. Поэтому будем искать корни уравнения (7.35) в виде ряда

$$D = D_0 (1 + d\nu + \dots), \quad (7.36)$$

где D_0 — корень уравнения (7.35) при $\nu = 0$, d — некоторый коэффициент, а точки означают члены, содержащие число ν в степени выше первой. Имеем

$$D^2 = D_0^2 (1 + 2d\nu + \dots),$$

$$D^4 = D_0^4 (1 + 4d\nu + \dots).$$

Внесем эти выражения для D^2 и D^4 в уравнение (7.35) и сгруппируем члены. Тогда с принятой точностью будем иметь

$$D_0^4 - 2(E + \beta)D_0^2 + (E - \beta)^2 + 4D_0^2 \{ [D_0^2 - (E + \beta)]d + 1 \} \nu + \dots = 0.$$

Учитывая, что ν — произвольное число, получим

$$\begin{aligned} D_0^4 - 2(E + \beta)D_0^2 + (E - \beta)^2 &= 0, \\ [D_0^2 - (E + \beta)]d + 1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Из первого равенства найдем корни уравнения (7.35) при $\nu = 0$:

$$D_1^0 = -D_4^0 = \sqrt{\beta} + \sqrt{E}, \quad D_2^0 = -D_3^0 = \sqrt{\beta} - \sqrt{E}. \quad (7.38)$$

Из второго равенства (7.37) определим d :

$$d = \frac{1}{E + \beta - D_0^2}.$$

Подставляя сюда значения D_k^0 из (7.38), получим

$$d_1 = d_4 = -\frac{1}{2\sqrt{E\beta}}, \quad d_2 = d_3 = \frac{1}{2\sqrt{E\beta}}.$$

Возвращаясь к равенству (7.36), найдем корни уравнения (7.35)

$$\begin{aligned} D_1 = -D_4 &= D_1^0 \left(1 - \frac{\nu}{2\sqrt{E\beta}} + \dots \right), \\ D_2 = -D_3 &= D_2^0 \left(1 + \frac{\nu}{2\sqrt{E\beta}} + \dots \right). \end{aligned} \quad (7.39)$$

При достаточно малом положительном числе ν (его можно сделать сколь угодно малым) выписанные члены определяют характер корней уравнения (7.35). Так как все корни D_k уравнения (7.35) оказались вещественными, то при фиксированных t, x, \dot{x} график функции

$$F = F(D)$$

имеет вид, изображенный на рис. 7.5. При изменении t, x, \dot{x} корни D_k и график функции $F = F(D)$ будут также

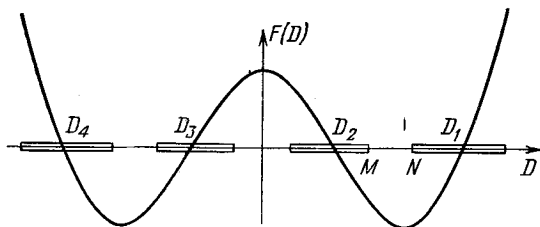


Рис. 7.5

изменяться. Предположим, что области изменения корней D_k имеют вид, показанный на рис. 7.5. В этом случае для любого числа D , находящегося между точками N и M , имеет место неравенство

$$F(D) < 0.$$

Это означает, что для случая, изображенного на рис. 7.5, существует постоянное число D , при котором выполняется второе обобщенное неравенство Сильвестра (7.31) и, следовательно, невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво относительно x_1 и x_2 или x и \dot{x} .

Из приведенного рассуждения очевиден путь дальнейших действий: для получения асимптотической устойчивости достаточно подчинить корни D_k условиям, при которых области изменения корней D_1 и D_2 , а также D_1 и D_3 не сомкнутся. Иначе говоря, для асимптотической устойчивости достаточно потребовать, чтобы в области (7.24) выполнялись неравенства

$$\sup D_2 < \inf D_1, \quad \sup D_3 < \inf D_1.$$

Считая, что при достаточно малом ν корни (7.39) уравнения (7.35) определяются выписанными членами, приведем последние неравенства к виду

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon) \sup D_2^0 &< (1 - \varepsilon) \inf D_1^0, \\ (1 + \varepsilon) \sup D_3^0 &< (1 - \varepsilon) \inf D_1^0, \end{aligned} \quad (7.40)$$

где число

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2 \cdot \inf \sqrt{E\beta}}$$

за счет уменьшения параметра ν можно сделать сколь угодно малым.

Согласно (7.38), (7.32) и (7.34), будем иметь

$$\begin{aligned} \sup D_2^0 &= \sqrt{\sup \beta} - \sqrt{\inf E} = \sqrt{B} - \sqrt{a_1(a - a_1)}, \\ \sup D_3^0 &= \sqrt{\sup E} - \sqrt{\inf \beta} = \sqrt{a_1(A - a_1)} - \sqrt{\bar{b}}, \\ \inf D_1^0 &= \sqrt{\inf \beta} + \sqrt{\inf E} = \sqrt{\bar{b}} + \sqrt{a_1(a - a_1)}. \end{aligned}$$

Теперь условия (7.40) принимают вид

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)(\sqrt{B} - \sqrt{a_1(a - a_1)}) &< (1 - \varepsilon)(\sqrt{\bar{b}} + \sqrt{a_1(a - a_1)}), \\ (1 + \varepsilon)(\sqrt{a_1(A - a_1)} - \sqrt{\bar{b}}) &< (1 - \varepsilon)(\sqrt{\bar{b}} + \sqrt{a_1(a - a_1)}). \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sqrt{B} - \sqrt{\bar{b}} &< 2\sqrt{a_1(a - a_1)} - \delta_1, \\ \sqrt{a_1(A - a_1)} - \sqrt{a_1(a - a_1)} &< 2\sqrt{\bar{b}} - \delta_2, \end{aligned} \quad (7.41)$$

где положительные числа

$$\delta_1 = \varepsilon(\sqrt{b} + \sqrt{B}), \quad \delta_2 = \varepsilon(\sqrt{a_1(a - a_1)} + \sqrt{a_1(A - a_1)})$$

можно сделать за счет уменьшения параметра ε сколь угодно малыми.

Так как все члены, входящие в неравенства (7.41), — постоянные числа, а параметры δ_1 и δ_2 можно выбрать сколь угодно малыми, то последние можно отбросить и заменить неравенства (7.41) на следующие ¹⁾:

$$\begin{aligned} \sqrt{B} - \sqrt{b} &< 2\sqrt{a_1(a - a_1)}, \\ 2\sqrt{b} &> \sqrt{a_1(A - a_1)} - \sqrt{a_1(a - a_1)}. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Таким образом, если границы a, A, b, B функций $\alpha(t, x, \dot{x})$ и $\beta(t, x, \dot{x})$ удовлетворяют условиям (7.42), то невозмущенное движение $x = 0, \dot{x} = 0$ будет асимптотически устойчиво. Число a_1 в промежутке (η, a) , где η сколь угодно мало, можно выбрать произвольно. Пользуясь этим обстоятельством, условия (7.42) можно усиливать в желаемом направлении. Рассмотрим три частных случая.

1. Жесткость системы постоянна ($\beta = \text{const}$). В этом случае $B = b$ и оба неравенства (7.42) будут выполнены, если верхний предел функции $\alpha(t, x, \dot{x})$ конечен. Действительно, первое неравенство (7.42) при $B = b$ выполняется для всех $a > 0$. Если взять число a_1 достаточно малым, то второе неравенство будет также удовлетворено при любом $b > 0$ и любом конечном $A = \sup \alpha(t, x, \dot{x})$. Таким образом, при постоянной жесткости системы ($\beta = \text{const}$) невозмущенное движение $x = 0$ и $\dot{x} = 0$ асимптотически устойчиво при любом переменном, но ограниченном коэффициенте демпфирования $\alpha(t, x, \dot{x})$.

2. Коэффициент демпфирования постоянен ($\alpha = \text{const}$). В этом случае $A = a$ и второе условие (7.42) выполняется автоматически. В первом условии положим $a_1 = a/2$ (при $a_1 = a/2$ выражение $a_1(a - a_1)$ достигает максимума). Тогда первое условие (7.42) приводится к виду

$$a > \sqrt{B} - \sqrt{b}. \quad (7.43)$$

¹⁾ Если два числа a и b связаны неравенством $a < b$, то между ними всегда можно вставить число $a + \delta$ такое, что $a + \delta < b$ или $a < b - \delta$, где $\delta > 0$.

Таким образом, невозмущенное движение $x = 0$, $\dot{x} = 0$ будет асимптотически устойчиво при любой переменной жесткости $\beta(t, x, \dot{x})$, если только постоянный коэффициент демпфирования $\alpha = a$ удовлетворяет условию (7.43).

3. Если считать B и b заданными, то, пользуясь свободой выбора числа a_1 , можно установить нижнюю границу a для $\alpha(t, x, \dot{x})$ и соответствующую верхнюю границу A . Для этого снова полагаем $a_1 = a/2$. Тогда из неравенств (7.42) найдем

$$a > \sqrt{B} - \sqrt{b}, \quad A < \frac{8b + 4a\sqrt{b} + a^2}{a}. \quad (7.44)$$

Если границы a , A , b , B функций $\alpha(t, x, \dot{x})$ и $\beta(t, x, \dot{x})$ удовлетворяют неравенствам (7.42) для всех $x, \dot{x}, t \geq t_0$, то будут выполнены условия теоремы Барбашина—Красовского¹⁾. В этом случае невозмущенное движение $x = 0$ и $\dot{x} = 0$ будет асимптотически устойчиво в целом, т. е. при любых начальных возмущениях x_0 и \dot{x}_0 ²⁾.

§ 7.5. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами

Исследование устойчивости движения многих систем, встречающихся в различных технических задачах, часто сводится к анализу линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В матричной форме эти уравнения могут быть записаны так (см. § 5.2, формула (5.19a)):

$$\dot{x} = P(t)x. \quad (7.45)$$

В этом уравнении x — матрица-столбец или вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (7.46)$$

¹⁾ Теорема Барбашина — Красовского сформулирована в § 2.3 для автономных систем. При функции $V(x)$, не зависящей явно от времени t и удовлетворяющей условию (2.16), эта теорема остается справедливой и в том случае, когда производная \dot{V} , зависящая явно от времени, является определенно-отрицательной функцией в смысле Ляпунова.

²⁾ Для случая, когда функции α и β зависят только от времени t , условия (7.44) были получены другим методом В. М. Старжинским [47]. Приведенный здесь вывод опубликован в работе [39].

а $P(t)$ — квадратная матрица

$$P(t) = \begin{vmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{vmatrix}. \quad (7.47)$$

Будем считать, что все элементы $p_{kj}(t)$ матрицы $P(t)$, а следовательно, и сама матрица P являются периодическими функциями времени t одного и того же периода T , так что для любого момента времени t справедливо равенство

$$P(t + T) = P(t). \quad (7.48)$$

Для получения критериев устойчивости таких систем кратко остановимся на некоторых общих вопросах теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, принадлежащей Флоке (Floquet).

Совокупность n линейно независимых решений уравнения (7.45)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{vmatrix} x_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n1} \end{vmatrix}, \dots, \mathbf{x}_n = \begin{vmatrix} x_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nn} \end{vmatrix} \quad (7.49)$$

называется *фундаментальной системой* решений этого уравнения, а матрица

$$X(t) = \|\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\| \quad (7.50)$$

или, что то же самое,

$$X(t) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \quad (7.51)$$

называется *фундаментальной матрицей*. Здесь, как и в дальнейшем, первый индекс элемента x_{kj} обозначает номер функции, а второй — номер решения.

Общее решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения (7.45) определяется обычной формулой общего решения линейного однородного дифференциального уравнения:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{x}_1 + C_2 \mathbf{x}_2 + \dots + C_n \mathbf{x}_n, \quad (7.52)$$

где C_1, \dots, C_n — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. В матричной форме общее решение (7.52) имеет вид

$$x(t) = X(t) \cdot C, \quad (7.53)$$

где C — матрица-столбец

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}. \quad (7.54)$$

Не нарушая общности, можно считать, что фундаментальная система решений удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$x_{kj}(0) = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

или в матричной форме

$$X(0) = E, \quad (7.55)$$

где E — единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\Delta(t)$ определитель фундаментальной матрицы

$$\Delta(t) = \det X(t). \quad (7.56)$$

Пользуясь равенством (7.55), получим

$$\Delta(0) = \det X(0) = \det E = 1. \quad (7.57)$$

В теории дифференциальных уравнений доказывается следующая формула Лиувилля:

$$\Delta(t) = \Delta(0) e^{\int_0^t (p_{11} + \dots + p_{nn}) dt}$$

Учитывая равенство (7.57), найдем, что при $t = T$

$$\Delta(T) = e^{\int_0^T (p_{11} + \dots + p_{nn}) dt} \quad (7.58)$$

Если в каком-нибудь решении x_k заменить t на $t + T$, то в силу периодичности матрицы $P(t)$ мы снова получим решение, так как вектор $x_k(t + T)$ будет по-прежнему удовлетворять уравнению (7.45), если ему удовлетворял вектор $x_k(t)$. Полученное решение не будет совпадать с первоначальным решением $x_k(t)$, но, как всякое решение уравнения (7.45), оно может быть получено из общего решения (7.53) выбором соответствующей матрицы-столбца C . Обозначив эту матрицу через A_k , найдем

$$x_k(t + T) = X(t) \cdot A_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда видно, что фундаментальная матрица $X(t + T)$ решений $x_1(t + T), x_2(t + T), \dots, x_n(t + T)$ имеет вид

$$X(t + T) = X(t)A, \quad (7.59)$$

где A — постоянная матрица:

$$A = \| A_1, \dots, A_n \| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (7.60)$$

По предположению фундаментальная система решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$ удовлетворяет начальным условиям (7.55). Поэтому, положив в равенстве (7.59) $t = 0$, найдем

$$X(T) = X(0)A = EA = A.$$

Следовательно, если известна фундаментальная матрица $X(t)$, то матрица A определится из последнего равенства:

$$A = X(T) = \begin{vmatrix} x_{11}(T) & \dots & x_{1n}(T) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(T) & \dots & x_{nn}(T) \end{vmatrix}. \quad (7.61)$$

Покажем далее, что существует решение $x(t)$, удовлетворяющее следующей зависимости:

$$x(t + T) = \rho x(t), \quad (7.62)$$

где ρ — некоторое постоянное число (такое решение называется *нормальным*). Действительно, любое решение уравнения (7.45) можно получить из общего решения (7.53). Поэтому если нормальное решение существует, то должна существовать такая постоянная матрица-

столбец

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad (7.63)$$

для которой будет справедливо равенство

$$x(t) = X(t)\beta.$$

Так как по предположению $x(t)$ удовлетворяет равенству (7.62), то, имея в виду, что $x(t+T) = X(t+T)\beta$, получим

$$X(t+T)\beta = \rho X(t)\beta$$

или, пользуясь равенством (7.59),

$$X(t)A\beta = \rho X(t)\beta.$$

Группируя члены, найдем

$$X(t)(A - \rho E)\beta = 0.$$

Учитывая, что это равенство должно выполняться при всех t , получим

$$(A - \rho E)\beta = 0.$$

Это матричное уравнение, в котором неизвестными являются матрица-столбец β и число ρ , эквивалентно n скалярным уравнениям

$$\begin{aligned} (a_{11} - \rho)\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \dots + a_{1n}\beta_n &= 0, \\ a_{21}\beta_1 + (a_{22} - \rho)\beta_2 + \dots + a_{2n}\beta_n &= 0, \\ a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \dots + (a_{nn} - \rho)\beta_n &= 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы система n алгебраических однородных уравнений относительно β_1, \dots, β_n имела решение, отличное от нуля, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы равнялся нулю:

$$\det(A - \rho E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0. \quad (7.64)$$

Каждому корню ρ_k этого характеристического уравнения (для простоты будем предполагать, что среди корней нет кратных) отвечает свое решение $x_k(t)$, удовлетво-

ряющее условию (7.62). В результате получим n нормальных решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$, удовлетворяющих условию (7.62):

$$x_1(t+T) = \rho_1 x_1(t), \dots, x_n(t+T) = \rho_n x_n(t). \quad (7.65)$$

Эта система решений линейно независима и может быть принята за фундаментальную систему решений.

Покажем теперь, что нормальные решения имеют вид

$$x_k(t) = e^{\alpha_k t} \varphi_k(t) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (7.66)$$

где $\varphi_k(t)$ — периодическая матрица-столбец периода T

$$\varphi_k(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1k}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{nk}(t) \end{pmatrix}, \quad \varphi_k(t+T) = \varphi_k(t), \quad (7.67)$$

а α_k — постоянные числа, называемые *характеристическими показателями*, вычисляются по формуле ¹⁾

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \ln \rho_k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (7.68)$$

Действительно, внесем в равенства (7.66) значение t , равное $t+T$. Получим

$$x_k(t+T) = e^{\alpha_k(t+T)} \varphi_k(t+T).$$

Пользуясь равенствами (7.67) и (7.68), последовательно найдем

$$\begin{aligned} x_k(t+T) &= e^{\alpha_k t} e^{\alpha_k T} \varphi_k(t+T) = e^{\alpha_k t} e^{\left(\frac{1}{T} \ln \rho_k\right) T} \varphi_k(t) = \\ &= \rho_k x_k(t), \end{aligned}$$

т. е. равенства (7.65).

Теперь можно перейти к исследованию устойчивости движения. Будем считать, что за фундаментальную систему решений уравнения (7.45) принята система нормальных решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$, удовлетворяющих условиям (7.65). Общее решение уравнения (7.45) запишем в форме (7.52)

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k x_k(t). \quad (7.69)$$

¹⁾ Напомним определение логарифма комплексного числа (корни уравнения (7.64) могут быть комплексными числами):

$$\ln \rho = \ln |\rho| + i \arg \rho,$$

где $|\rho|$ есть модуль ρ и $\arg \rho$ обозначает аргумент ρ .

Вектор $x(t)$ определяет изображающую точку M , а слагаемые $C_k x_k(t)$ являются составляющими его. Через период T положение изображающей точки M будет определяться равенством

$$x(t + T) = \sum_{k=1}^n C_k x_k(t + T).$$

Составляющие этого вектора, согласно (7.65), равны

$$C_k x_k(t + T) = \rho_k C_k x_k(t). \quad (7.70)$$

Отсюда

$$|C_k x_k(t + T)| = |\rho_k| |C_k x_k(t)|.$$

Это равенство показывает, что если все $|\rho_k| < 1$, то через период T модули всех составляющих вектора $x(t + T)$ уменьшатся и, следовательно, изображающая точка M приблизится к началу координат; если модуль хотя бы одного корня ρ_k больше единицы, то через период T соответствующая составляющая $C_k x_k(t + T)$ вектора $x(t + T)$ увеличится по модулю и изображающая точка M начнет отдаляться от начала координат; наконец, если среди корней характеристического уравнения имеются такие, модули которых равны единице, то модули соответствующих составляющих вектора $x(t + T)$ останутся без изменения.

Из этого вытекают следующие условия устойчивости системы, возмущенное движение которой описывается линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами.

Если модули всех корней характеристического уравнения (7.64) меньше единицы, то невозмущенное движение $x_1 = \dots = x_n = 0$ асимптотически устойчиво.

Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один, модуль которого больше единицы, то невозмущенное движение неустойчиво.

Если среди корней характеристического уравнения имеются такие, модули которых равны единице, а модули остальных корней меньше единицы, то невозмущенное движение устойчиво, хотя и не асимптотически.

Заметим, что первые два вывода справедливы и при кратных корнях характеристического уравнения, а последний только при простых корнях (точнее, при корнях простых относительно элементарных делителей).

Раскроем определитель (7.64) и приведем его к виду

$$\rho^n + a_1\rho^{n-1} + a_2\rho^{n-2} + \dots + a_{n-1}\rho + a_n = 0. \quad (7.71)$$

Коэффициент a_n определяется, очевидно, равенством

$$a_n = (-1)^n \det A.$$

Пользуясь равенствами (7.61), (7.56) и (7.58), найдем

$$a_n = (-1)^n e^0 \int_0^T (p_{11} + \dots + p_{nn}) dt \quad (7.72)$$

Таким образом, свободный член характеристического уравнения (7.71) может быть найден по коэффициентам исходных уравнений (7.45). К сожалению, для определения остальных коэффициентов уравнения (7.71) необходимо знать хотя бы одну фундаментальную матрицу $X(t)$ (легко доказывается, что уравнение (7.71) не зависит от выбора фундаментальной матрицы). Задача облегчается тем, что критерии устойчивости носят характер неравенств, поэтому можно пользоваться численными и приближенными методами.

Один из этих методов состоит в следующем. Задав начальные условия (7.55), численным интегрированием уравнения (7.45) определяют значения линейно независимых решений (7.49) в конце периода T , т. е. матрицу $X(T) = A$. Так как интегрирование нужно производить на конечном промежутке времени $[0, T]$, то все вычисления можно произвести с любой наперед заданной точностью (для этой цели лучше всего, конечно, использовать электронно-вычислительные машины). По найденной матрице A составляется характеристическое уравнение (7.64), после чего определяются корни $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Хорошим контролем этого метода может служить равенство (7.72), которое с помощью последней формулы Виета (4.23) приводится к виду

$$\rho_1 \dots \rho_n = e^0 \int_0^T (p_{11} + \dots + p_{nn}) dt$$

Отметим, что в этом методе заключение об устойчивости движения на бесконечном промежутке времени делается на основании результатов интегрирования на конечном интервале времени $[0, T]$.

Со вторым приближенным методом (их существует значительно больше) мы познакомимся в следующем параграфе, а сейчас остановимся на случае, когда среди корней характеристического уравнения имеются корни, равные $+1$ или -1 .

Предположим, что $\rho = +1$. Тогда соответствующее нормальное решение будет удовлетворять равенству (см. формулу (7.62)) $x(t + T) = x(t)$.

Это означает, что уравнение (7.45) имеет периодическое решение, период которого T совпадает с периодом коэффициентов.

Пусть теперь $\rho = -1$. Тогда соответствующее нормальное решение будет удовлетворять равенству

$$x(t + T) = -x(t).$$

Еще через один период будем иметь

$$x(t + 2T) = -x(t + T) = x(t).$$

Из этого следует, что при наличии корня $\rho = -1$ уравнение (7.45) имеет периодическое решение, период которого $2T$ вдвое больше периода T коэффициентов исходного уравнения.

А. М. Ляпунов показал [35], что всякую систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами можно привести при помощи линейной подстановки к системе уравнений с постоянными коэффициентами. Подробное исследование систем, которые могут быть приведены к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами, содержится в работе Н. П. Еругина [19].

§ 7.6. Устойчивость решений уравнений Хилла и Матье

Возмущенное движение многих систем (см. § 7.7) описывается одним дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0, \quad (7.73)$$

где $p(t)$ — периодическая функция периода T . Разложим функцию $p(t)$ в ряд Фурье

$$p(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + B_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right). \quad (7.74)$$

Теперь уравнение (7.73) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + B_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) \right] x = 0. \quad (7.75)$$

Уравнение, записанное в такой форме, впервые рассматривалось Г. В. Хиллом (G. W. Hill) при исследовании движения Луны.

Для наших целей уравнение Хилла удобно записать в следующей форме:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [\delta + \varepsilon\psi(t)] x = 0, \quad (7.76)$$

где δ и ε — некоторые параметры, а $\psi(t)$ — периодическая функция периода T . Функцию $\psi(t)$ называют *функцией возбуждения*, а ее частоту $\omega = 2\pi/T$ — *частотой возбуждения*.

Очевидно, что выбором параметров δ и ε невозмущенное движение $x = 0$, $\dot{x} = 0$ можно сделать устойчивым и неустойчивым. Так, например, при $\varepsilon = 0$ и $\delta > 0$, движение устойчиво, а при $\varepsilon = 0$ и $\delta < 0$ это движение неустойчиво. Поэтому задачу об устойчивости решений уравнения Хилла можно поставить следующим образом: *в плоскости параметров δ и ε найти области устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения $x = 0$, $\dot{x} = 0$.*

Установим прежде всего некоторые общие свойства решений уравнения Хилла. Положим

$$x = x_1, \quad \dot{x} = x_2.$$

Тогда одно уравнение (7.76) будет эквивалентно двум уравнениям первого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -[\delta + \varepsilon\psi(t)] x_1. \quad (7.77)$$

Напишем матрицу коэффициентов этой системы (см. (7.47)):

$$P(t) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -[\delta + \varepsilon\psi(t)] & 0 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, $p_{11} = p_{22} = 0$. Пользуясь формулой (7.72), найдем $a_2 = 1$. Согласно равенству (7.71), характеристическое уравнение запишется в виде

$$\rho^2 + a\rho + 1 = 0. \quad (7.78)$$

Коэффициент a нам неизвестен и для его определения необходимо знать фундаментальную матрицу решений.

Так как найти эту матрицу в замкнутой форме мы не можем, то для определения области устойчивости в плоскости параметров δ и ε воспользуемся следующими соображениями.

Согласно формуле Виета произведение корней ρ_1 и ρ_2 уравнения (7.78) равно единице

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = 1.$$

Решим уравнение (7.78), считая коэффициент a известным

$$\rho_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}.$$

Рассмотрим возможные случаи.

1. $|a| > 2$. Оба корня уравнения (7.78) будут вещественными и различными. Так как их произведение равно единице, то один из корней будет по модулю меньше единицы, а второй больше единицы. Из этого следует, что при $|a| > 2$ движение будет неперiodическим и неустойчивым.

2. $|a| < 2$. Тогда

$$\rho_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} i,$$

где $i = \sqrt{-1}$. Корни получились комплексные. Найдем модуль этих корней:

$$|\rho_{1,2}| = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}\right)^2} = 1.$$

Модули корней оказались равными единице, а сами корни различны. Поэтому при $|a| < 2$ движение будет устойчивым.

3. $a = -2$. В этом случае $\rho_1 = \rho_2 = +1$. Как было показано в конце § 7.5, одному из этих корней будет отвечать периодическое решение периода T . Можно показать (мы не будем останавливаться на этом), что второму корню отвечает возрастающее решение (корни кратные не только относительно характеристического уравнения, но и относительно элементарных делителей). Движение будет неустойчивым, но существенно, что имеется периодическое решение периода T .

4. $a = +2$. При этом условии $\rho_1 = \rho_2 = -1$. Одному из этих корней будет отвечать периодическое решение периода $2T$ (движение, как и в случае 3, неустойчиво).

Таким образом, движение будет устойчиво только при $|a| < 2$. Коэффициент a уравнения (7.78) при данном периоде T возбуждающей функции $\psi(t)$ зависит, в конечном счете, от параметров δ и ε . Предположим, что коэффициент $a = a(\delta, \varepsilon)$ найден. Тогда границей области устойчивости на плоскости δ, ε будут служить уравнения

$$a(\delta, \varepsilon) = \pm 2. \quad (7.79)$$

Из случаев 3 и 4 следует, что на границе области устойчивости, то есть для значений δ и ε , удовлетворяющих уравнениям (7.79), существуют периодические решения периода T и $2T$. Эти выводы дают возможность определить границы области устойчивости из условия существования периодических решений уравнения Хилла.

Прежде чем перейти к определению границ области устойчивости, рассмотрим аналитический вид решений уравнения Хилла (7.76). Пользуясь формулами (7.66) и (7.69), запишем общее решение в следующей форме:

$$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} \varphi_1(t) + C_2 e^{\alpha_2 t} \varphi_2(t). \quad (7.80)$$

В этом решении C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — некоторые периодические функции, период которых равен периоду T возбуждающей функции $\psi(t)$, а α_1 и α_2 — характеристические показатели, определяемые равенством (7.68):

$$\alpha_1 = \frac{1}{T} \ln \rho_1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T} \ln \rho_2,$$

где ρ_1 и ρ_2 — корни уравнения (7.78).

Рассмотрим сначала область неустойчивости, в которой $|a| > 2$. Как было установлено, при этом условии корни ρ_1 и ρ_2 характеристического уравнения (7.78) вещественны и различны. Предположим, что оба корня положительны (случай, когда ρ_1 и ρ_2 отрицательны, не вносит ничего принципиально нового). Обозначим через $\rho_1 = \rho$ больший корень. Тогда, учитывая, что произведение корней равно единице, будем иметь

$$\rho_1 > 1, \quad \rho_2 = \frac{1}{\rho_1} < 1.$$

Отсюда

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{1}{T} \ln \rho_1 > 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T} \ln \rho_2 = \frac{1}{T} \ln \frac{1}{\rho_1} = -\alpha < 0.$$

Общее решение (7.80) можно записать теперь в следующей форме:

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} \varphi_1(t) + C_2 e^{-\alpha t} \varphi_2(t). \quad (7.81)$$

Так как решение $x(t)$ является вещественной функцией, то произвольные постоянные C_1 и C_2 , а также периодические функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ должны быть вещественными величинами. Второе слагаемое в равенстве (7.81) быстро затухает ($\alpha > 0$) и практически можно ограничиться первым членом

$$x(t) \approx C_1 e^{\alpha t} \varphi_1(t). \quad (7.82)$$

Из этого решения видно, что максимальные значения (амплитуды) функции $x(t)$ возрастают по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $e^{\alpha T} = \rho > 1$. Примерный вид графика решения (7.82) показан

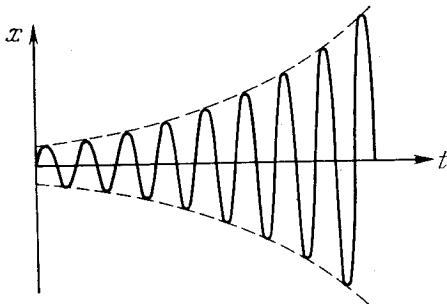


Рис. 7.6

на рис. 7.6 (этот график зависит от вида периодической функции $\varphi_1(t)$, которая, как правило, нам неизвестна).

Рассмотрим теперь аналитический вид решения уравнения Хилла (7.76), отвечающего значениям параметров ε и δ из области устойчивости. Как было установлено, в этой области оба корня ρ_1 и ρ_2 уравнения (7.78) — комплексно-сопряженные числа, причем $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$. На основании определения логарифма комплексного числа будем иметь ($\rho_1 = \rho$)

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{T} (\ln |\rho| \pm i \arg \rho)$$

или, учитывая, что $\ln |\rho| = \ln 1 = 0$,

$$\alpha_1 = \frac{k}{T} i, \quad \alpha_2 = -\frac{k}{T} i, \quad (7.83)$$

где

$$k = |\arg \rho|. \quad (7.84)$$

Так как α_1 и α_2 — комплексно-сопряженные числа, а решение $x(t)$ является вещественной функцией, то постоянные интегрирования C_1 и C_2 , а также периодические функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ должны быть комплексно-сопряженными величинами. Представим их в показательной форме

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} A e^{\beta i}, \quad C_2 = \frac{1}{2} A e^{-\beta i}, \\ \varphi_1(t) &= \gamma(t) e^{v(t)i}, \quad \varphi_2(t) = \gamma(t) e^{-v(t)i}. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Внося выражения для α_j , C_j и φ_j в равенство (7.80), найдем

$$x(t) = \frac{A}{2} \gamma(t) \left[e^{\left(\frac{k}{T} t + v(t) + \beta\right)i} + e^{-\left(\frac{k}{T} t + v(t) + \beta\right)i} \right].$$

Пользуясь известной формулой

$$\frac{1}{2} (e^{zi} + e^{-zi}) = \cos z,$$

получим

$$x(t) = A \gamma(t) \cos \left[\frac{k}{T} t + v(t) + \beta \right] \quad (7.86)$$

или

$$x(t) = \mu(t) \cos \left(\frac{k}{T} t + \beta \right) + \eta(t) \sin \left(\frac{k}{T} t + \beta \right), \quad (7.87)$$

где функции $\mu(t)$ и $\eta(t)$ определены равенствами

$$\mu(t) = A \gamma(t) \cos v(t), \quad \eta(t) = -A \gamma(t) \sin v(t). \quad (7.88)$$

В общем решении (7.86) или (7.87), отвечающем области устойчивости, постоянные вещественные числа A и β определяются из начальных условий движения, а $\gamma(t)$ и $v(t)$ или $\mu(t)$ и $\eta(t)$ — вещественные периодические функции, период T которых равен периоду возбуждающей функции $\psi(t)$. Как правило, функции $\gamma(t)$ и $v(t)$ (тем самым и функции $\mu(t)$ и $\eta(t)$), а также число $k = |\arg \rho|$ определить в замкнутой форме мы не можем, так что равенства (7.86) и (7.87) определяют только форму решения уравнения Хилла, а не само решение. Однако из этих равенств мы можем составить общее представление о характере устойчивых решений уравнения Хилла. Действительно, из равенства (7.87) видно, что общее решение

представляет комбинацию периодических функций с периодами $T_1 = T$ и $T_2 = \frac{2\pi}{k} T$. Если периоды T_1 и T_2 несоизмеримы, то устойчивое решение уравнения Хилла не является периодической функцией времени. Если же отношение

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k}{2\pi}$$

представляет рациональное число, то устойчивое решение уравнения Хилла является периодической функцией.

Из равенства (7.86) можно составить и общее представление о графике устойчивого решения. Для случая, когда $T_1 \ll T_2$ ($k \ll 2\pi$), примерный график решения (7.86)

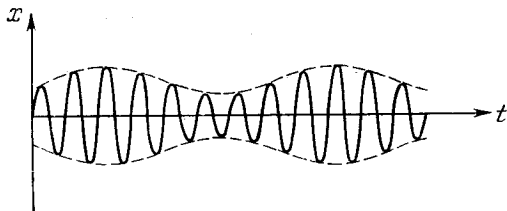


Рис. 7.7

изображен на рис. 7.7 (он напоминает график колебаний при биении). Заметим, что колебания системы, вызванные возбуждающей функцией, называются *параметрическими колебаниями*.

Покажем теперь метод определения границы области устойчивости на частном, но имеющем большое значение случае, когда разложение (7.74) функции $p(t)$ в ряд Фурье содержит только два периодических слагаемых самой низкой частоты, т. е.

$$p(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + B_1 \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Положим

$$A_1 = A \cos \gamma, \quad B_1 = A \sin \gamma,$$

где A и γ — некоторые постоянные. В этих обозначениях будем иметь

$$p(t) = \frac{A_0}{2} + A \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \gamma \right).$$

Внося $p(t)$ в уравнение (7.73), получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[\frac{A_0}{2} + A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \gamma\right) \right] x = 0.$$

Перейдем теперь к безразмерному времени τ по формуле

$$\frac{2\pi}{T}t - \gamma = \tau.$$

Отсюда

$$dt = \frac{T}{2\pi} d\tau$$

и последнее уравнение примет свой окончательный вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (\delta + \varepsilon \cos \tau) x = 0, \quad (7.89)$$

где

$$\delta = \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{A_0}{2}, \quad \varepsilon = \frac{T^2}{4\pi^2} A. \quad (7.90)$$

Уравнение (7.89) называется *уравнением Матъе*; оно является, конечно, частным случаем уравнения Хилла (7.76).

Возбуждающая функция равна $\cos \tau$, а ее период равен 2π . В соответствии с примечанием к (7.79) будем искать те значения δ и ε , при которых существуют периодические решения периодов 2π и 4π . Из самой формы уравнения (7.89) видно, что если функция $x = x(\tau)$ есть решение уравнения (7.89), то функции $x = x(-\tau)$ и $x = -x(\tau)$ будут также решениями этого уравнения. Из этого следует, что среди периодических решений уравнения Матъе имеются *четные* и *нечетные решения*. Четные периодические решения периода 2π будем искать в форме

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\tau, \quad (7.91)$$

а нечетные периодические решения того же периода — в форме

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\tau. \quad (7.92)$$

Периодические решения периода 4π представим аналогичными рядами:

$$x = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \frac{k\tau}{2}, \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin \frac{k\tau}{2}. \quad (7.93)$$

Остановимся более подробно на решении (7.91). Продифференцировав обе части уравнения (7.91) два раза по времени τ , найдем

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k \cos k\tau.$$

Внеся это выражение и выражение (7.91) для x в уравнение (7.89), получим

$$- \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k \cos k\tau + (\delta + \varepsilon \cos \tau) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\tau \right) = 0.$$

Раскроем скобки и воспользуемся формулой

$$\cos \tau \cos k\tau = \frac{1}{2} [\cos(k+1)\tau + \cos(k-1)\tau].$$

Тогда последнее уравнение примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\delta - k^2) a_k \cos k\tau + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \left\{ a_0 \cos \tau + \sum_{k=1}^{\infty} a_k [\cos(k+1)\tau + \cos(k-1)\tau] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Преобразуем выражение в фигурных скобках. Имеем

$$\begin{aligned} \{ \dots \} &= a_0 \cos \tau + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k+1)\tau + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k-1)\tau = \\ &= a_0 \cos \tau + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} \cos k\tau + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \cos k\tau. \end{aligned}$$

Слагаемое $a_0 \cos \tau$ внесем в первую сумму, а из второй суммы выделим первое слагаемое, после чего объединим обе суммы. Тогда получим

$$\{ \dots \} = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k-1} + a_{k+1}) \cos k\tau.$$

Теперь равенство (7.94) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{2} a_0 + \frac{\varepsilon}{2} a_1 + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon}{2} a_{k-1} + (\delta - k^2) a_k + \frac{\varepsilon}{2} a_{k+1} \right] \cos k\tau = 0. \end{aligned}$$

Так как это равенство должно выполняться для всех значений τ , то отсюда следует

$$\begin{aligned} \delta a_0 + \varepsilon a_1 &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{2} a_{k-1} + (\delta - k^2) a_k + \frac{\varepsilon}{2} a_{k+1} &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Запишем эту систему равенств более подробно, учитывая, что индекс k принимает значения $1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \delta a_0 + \varepsilon a_1 &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{2} a_0 + (\delta - 1) a_1 + \frac{\varepsilon}{2} a_2 &= 0, \\ \frac{\varepsilon}{2} a_1 + (\delta - 4) a_2 + \frac{\varepsilon}{2} a_3 &= 0, \\ \dots & \dots \end{aligned} \tag{7.95}$$

Эти линейные однородные уравнения относительно a_0, a_1, a_2, \dots должны иметь решение, отличное от нуля (так как существует периодическое решение (7.91)). Поэтому определитель этой системы должен равняться нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 1 & \frac{\varepsilon}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 4 & \frac{\varepsilon}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 9 & \frac{\varepsilon}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 16 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \tag{7.96}$$

Это уравнение, содержащее в левой части определитель с бесконечным числом строк и столбцов (он называется *определителем Хилла*), устанавливает искомую зависимость между δ и ε :

$$\delta = \delta(\varepsilon),$$

при которой существует периодическое решение вида (7.91). В явной форме эту зависимость можно установить следующим образом. Раскроем определитель (7.96) при конечном n . Тогда получим обычное алгебраическое уравнение, из которого найдем приближенное решение $\delta_n = \delta_n(\varepsilon)$. Точное решение получается при $n \rightarrow \infty$ (это решение можно представить в форме сходящихся рядов). График функции $\delta = \delta(\varepsilon)$ определяет одну из границ области устойчивости решений уравнения Матье в

пространстве параметров δ и ε (ниже будет дано решение уравнения (7.96) при $|\varepsilon| \ll 1$).

Аналогичными методами получаются три других уравнения для периодических решений вида (7.92) и (7.93):

$$\begin{vmatrix} \delta - 1 & \frac{\varepsilon}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 4 & \frac{\varepsilon}{2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 9 & \frac{\varepsilon}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 16 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (7.97)$$

$$\begin{vmatrix} \delta - \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\varepsilon}{2} & \delta - \frac{9}{4} & \frac{\varepsilon}{2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2} & \delta - \frac{25}{4} & \frac{\varepsilon}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} & \delta - \frac{49}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (7.98)$$

$$\begin{vmatrix} \delta - \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\varepsilon}{2} & \delta - \frac{9}{4} & \frac{\varepsilon}{2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2} & \delta - \frac{25}{4} & \frac{\varepsilon}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} & \delta - \frac{49}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (7.99)$$

Таким путем определяются области устойчивости для уравнения Матье; результаты приведены на диаграмме Айнса — Стретта (рис. 7.8), где областям устойчивости соответствуют заштрихованные поля, а областям неустойчивости — белые поля. Диаграмма дана только для $\varepsilon \geq 0$; для $\varepsilon < 0$ она получается зеркальным отображением относительно оси δ . Отдельные области смыкаются между собой в точках $\delta = n^2/4$ и $\varepsilon = 0$, где n — целое число.

Как видно из диаграммы, область устойчивости существует и при отрицательных δ . Очевидно, что аналогич-

ными методами можно построить соответствующую диаграмму и для уравнения Хилла (7.76), разложив предварительно возбуждающую функцию $\psi(t)$ в ряд Фурье.

Проследим за изменением свойств параметрических колебаний при изменении частоты $\omega = 2\pi/T$ возбуждения. Пусть частоте ω на диаграмме Айнса — Стретта

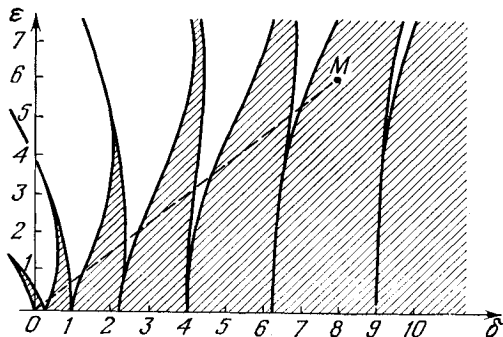


Рис. 7.8

отвечает точка M (см. рис. 7.8). Соответствующие значения параметров δ и ϵ найдем из формул (7.90):

$$\delta = \frac{A_0}{2\omega^2}, \quad \epsilon = \frac{A}{\omega^2}. \quad (7.100)$$

Из этих равенств видно, что при увеличении частоты возбуждения ω параметры δ и ϵ будут уменьшаться, а точка M будет перемещаться по прямой

$$\delta = \frac{A_0}{2A} \epsilon, \quad (7.101)$$

асимптотически приближаясь к началу координат (на рис. 7.8 эта прямая показана пунктиром). Из рисунка видно, что прямая (7.101) пересекает области устойчивости и неустойчивости. Это означает, что при увеличении частоты возбуждения ω устойчивые и неустойчивые состояния системы будут чередоваться. Заметим, что в некоторых случаях (см. пример 1 § 7.7) параметр ϵ может не зависеть от ω . В этих случаях прямая, показанная на рис. 7.8, будет параллельна оси δ , однако вывод о чередовании устойчивых и неустойчивых состояний системы при увеличении частоты возбуждения остается справедливым.

Если при данных значениях параметров δ и ε имеет место неустойчивость, то говорят, что наступает *параметрический резонанс*. Из приведенных рассуждений видно, что параметрический резонанс имеет место при бесчисленном множестве значений частоты возбуждения ω . При малых ε параметрический резонанс наступает вблизи значений $\delta = n^2/4$, где n — целое число (см. описание рис. 7.8).

Между обычным и параметрическим резонансами имеются существенные различия. Действительно, если на систему с линейным упругим элементом действует возмущающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону, то дифференциальное уравнение движения приводится к виду

$$\ddot{x} + k^2x = H \cos \omega t.$$

При совпадении частоты возмущающей силы ω с частотой собственных колебаний k частное решение, соответствующее вынужденным колебаниям, будет

$$x = \frac{H}{2\omega} t \sin \omega t.$$

Из этого решения и его графика (рис. 5.1) видно, что обычный резонанс представляет неограниченное возрастание вынужденных колебаний устойчивой системы (см. пример 3 § 5.4), возникающих под действием возмущающей силы. Резонанс появляется только при одной частоте возмущающей силы $\omega = k$ и любых, в том числе и нулевых, начальных условиях¹⁾. Амплитуды вынужденных колебаний возрастают практически по закону арифметической прогрессии, разность которой приближенно определяется равенством $d = H\pi/(2\omega^2)$ (если не считать нескольких первых колебаний, то это равенство дает очень хорошее приближение).

Параметрический резонанс — это возрастающие колебания около неустойчивого положения равновесия. Он возникает не при одном, а при бесчисленном множестве значений частоты возбуждения в результате появления неизбежных начальных возмущений (при нулевых началь-

¹⁾ При $\omega \neq k$ частное решение имеет вид

$$x = \frac{H}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

и, следовательно, амплитуды вынужденных колебаний не возрастают.

ных условиях система находится в состоянии неустойчивого равновесия). Характер движения системы при параметрическом резонансе практически определяется соотношением (7.82) (см. также рис. 7.6)

$$x(t) \approx Ce^{\alpha t} \varphi(t),$$

где $\alpha > 0$, а $\varphi(t)$ — периодическая функция, период которой равен периоду возбуждающей функции T . Амплитуды колебаний при параметрическом резонансе, как это следует из последней формулы, возрастают по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой (фактор возрастания) определяется равенством

$$f = e^{\alpha T/2}.$$

Остановимся теперь на вычислении зависимости $\delta = \delta(\varepsilon)$ при условии, что $|\varepsilon| \ll 1$.

Ограничимся в бесконечном определителе (7.96) Хилла сначала двумя строками и двумя столбцами

$$\Delta_2(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\Delta_2(\varepsilon) = \delta(\delta - 1) - \frac{\varepsilon^2}{2} = 0.$$

Положим $\varepsilon = 0$. Тогда

$$\Delta(0) = \delta(\delta - 1).$$

Это нулевое приближение имеет два корня

$$\delta_1^{(0)} = 0, \quad \delta_2^{(0)} = 1.$$

Для определения первого приближения положим

$$\delta_1^{(1)} = \delta_1^{(0)} + a_1 \varepsilon^2, \quad \delta_2^{(1)} = \delta_2^{(0)} + a_2 \varepsilon^2$$

или, учитывая значения $\delta_1^{(0)}$ и $\delta_2^{(0)}$,

$$\delta_1^{(1)} = a_1 \varepsilon^2, \quad \delta_2^{(1)} = 1 + a_2 \varepsilon^2.$$

Составим теперь из (7.96) определитель Δ_3 :

$$\Delta_3(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & 0 \\ \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 1 & \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, находим

$$\Delta_3(\varepsilon) = \delta(\delta - 1)(\delta - 4) - \frac{\varepsilon^2}{4}(3\delta - 8) = 0.$$

Внесем сюда сначала $\delta_1^{(1)} = a_1\varepsilon^2$:

$$a_1\varepsilon^2(a_1\varepsilon^2 - 1)(a_1\varepsilon^2 - 4) - \frac{\varepsilon^2}{4}(3a_1\varepsilon^2 - 8) = 0$$

или, ограничиваясь членами не выше второго порядка малости,

$$4a_1\varepsilon^2 + 2\varepsilon^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \quad \delta_1^{(1)} = -\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Аналогично найдем a_2 и $\delta_2^{(1)}$:

$$a_2 = \frac{5}{12}, \quad \delta_2^{(1)} = 1 + \frac{5}{12}\varepsilon^2.$$

Можно показать, что если придерживаться принятой точности, то вычисления с помощью определителей более высокого порядка не внесут улучшения в найденные значения a_1 и a_2 . Это следует из очевидного равенства, получающегося из определителя (7.96) для конечного n при раскрытии его по элементам последнего столбца или строки:

$$\Delta_n = [\delta - (n - 1)^2] \Delta_{n-1} - \frac{\varepsilon^2}{4} \Delta_{n-2}.$$

Поэтому будем считать, что при малых ε два решения уравнения (7.96) определяются равенствами:

$$\delta = -\frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \delta = 1 + \frac{5}{12}\varepsilon^2. \quad (7.102)$$

Аналогично получим решения уравнений (7.97) — (7.99):

$$\delta = 1 - \frac{1}{12}\varepsilon^2, \quad \delta = \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \delta = \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (7.103)$$

причем улучшить эти результаты за счет повышения порядка определителей нельзя, если только вычисления вести до первого члена, содержащего ε . На рис. 7.9 показаны области устойчивости для малых ε .

Если в систему ввести демпфирование, то уравнение (7.89) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2h \frac{dx}{d\tau} + (\delta + \varepsilon \cos \tau)x = 0, \quad (7.104)$$

где $h > 0$.

С помощью подстановки

$$x = e^{-h\tau}z \quad (7.105)$$

приведем уравнение (7.104) к виду

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + (\delta - h^2 + \varepsilon \cos \tau)z = 0. \quad (7.106)$$

Это уравнение совпадает с уравнением Матье (7.89), если положить

$$\delta_1 = \delta - h^2.$$

Предположим, что при заданных δ , h , ε уравнение (7.106) определяет устойчивое движение относительно z .

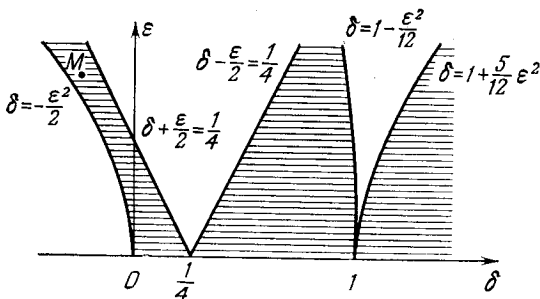


Рис. 7.9

Тогда, согласно равенству (7.105), движение будет асимптотически устойчиво относительно переменной x .

§ 7.7. Примеры исследования устойчивости систем с параметрическим возбуждением

Параметрические возбуждения встречаются во многих системах. Так, например, они возникают в системах, на которые действуют периодически изменяющиеся силы (см. пример 1), при периодически изменяющейся жесткости упругих элементов системы, при качке судов [7], при вращении валов с различными моментами инерции и т. п. Большое значение имеют рассмотренные в этой главе методы при исследовании устойчивости периодических колебаний нелинейных систем.

Мы ограничимся рассмотрением двух простейших примеров.

Пример 1. Влияние вибрации точки подвеса на устойчивость равновесия маятника. Пусть материальная точка M массой m укреплена на конце стержня, который может вращаться вокруг горизонтальной оси O . Очевидно, что такой маятник имеет два положения равновесия: нижнее устойчивое и верхнее неустойчивое. Исследуем влияние колебаний точки подвеса O на характер равновесия маятника.

Рассмотрим сначала влияние горизонтальных колебаний точки подвеса O на устойчивость нижнего положения равновесия маятника (рис. 7.10). Присоединим к силе тяжести маятника mg переносную силу инерции $\Phi_e = -m\ddot{x}$, где $x = x(t)$ — закон движения точки O . Воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения относительно оси вращения маятника (массой стержня пренебрегаем):

$$\frac{d}{dt} (ml^2\dot{\varphi}) = -mgl \sin \varphi - m\ddot{x}l \cos \varphi.$$

Будем считать, что точка подвеса маятника колеблется по гармоническому закону $x = a \cos \omega t$. Тогда для малых углов φ последнее уравнение примет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = \frac{a\omega^2}{l} \cos \omega t.$$

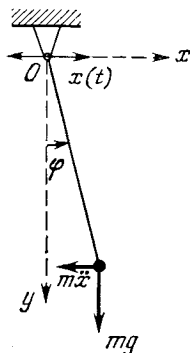


Рис. 7.10

Это уравнение обычных вынужденных колебаний системы, находящейся под действием возмущающей силы $(a\omega^2/l) \cos \omega t$. Резонанс возможен только при совпадении частоты возмущающей силы с частотой собственных колебаний, равной $\sqrt{g/l}$, т. е. при

$$\omega = \sqrt{g/l}.$$

Рассмотрим теперь влияние вертикальных колебаний точки подвеса на устойчивость нижнего равновесного положения маятника (рис. 7.11, а). Присоединим к силе тяжести маятника mg переносную силу инерции $\Phi_e = -m\ddot{y}$, где $y = a \cos \omega t$ — закон движения точки O по вертикали, и снова воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения относительно оси вращения маятника

$$\frac{d}{dt} (ml^2\dot{\varphi}) = -m(g - \ddot{y})l \sin \varphi,$$

или, считая угол φ малым,

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} + a \frac{\omega^2}{l} \cos \omega t \right) \varphi = 0.$$

Для того чтобы привести это уравнение Матве к канонической форме (7.89), положим

$$\omega t = \tau.$$

После очевидных преобразований получим

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \left(\frac{g}{l\omega^2} + \frac{a}{l} \cos \tau \right) \varphi = 0. \quad (7.107)$$

Сравнивая это с уравнением (7.89), находим

$$\delta = g/(l\omega^2), \quad \varepsilon = a/l. \quad (7.108)$$

Параметрический резонанс при малых ε наступает вблизи значений $\delta = k^2/4$, где k — целое положительное число. Поэтому

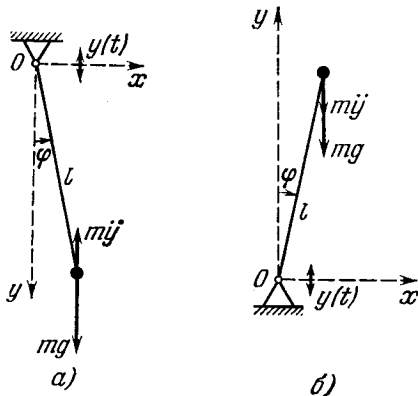


Рис. 7.11

при частоте вертикальных колебаний точки подвеса, близких к значениям

$$\omega = 2/n \sqrt{g/l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

устойчивое нижнее положение маятника делается неустойчивым. Отметим, что обычный резонанс будет только при частоте $\omega = \sqrt{g/l}$, в то время как параметрический резонанс наступает вблизи частот

$$2\sqrt{g/l}, \quad \sqrt{g/l}, \quad 2/3\sqrt{g/l}, \quad 1/2\sqrt{g/l}, \dots$$

Проведенный анализ показывает, что устойчивость нижнего положения маятника может быть разрушена вертикальными колебаниями точки подвеса.

Рассмотрим теперь, нельзя ли с помощью тех же колебаний стабилизировать верхнее неустойчивое положение маятника. Для получения дифференциального уравнения малых колебаний маятника около верхнего положения равновесия достаточно в уравнении (7.107) заменить g на $-g$:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \left(-\frac{g}{l\omega^2} + \frac{a}{l} \cos \tau \right) \varphi = 0.$$

Теперь

$$\delta = -g/(l\omega^2), \quad \varepsilon = a/l.$$

Будем считать, что амплитуда a колебаний точки подвеса мала по сравнению с длиной маятника l . Тогда $\varepsilon \ll 1$, и можно использовать диаграмму, изображенную на рис. 7.9. Из этой диаграммы видно, что для стабилизации верхнего положения маятника при отрицательном δ точка M с координатами δ, ε должна находиться выше параболы $\delta = -\varepsilon^2/2$ и ниже прямой $\delta = 1/4 - \varepsilon/2$, т. е. должны выполняться неравенства

$$1/2 - 2\delta > \varepsilon > \sqrt{-2\delta}.$$

Внесем в это двойное неравенство значения δ и ε :

$$\frac{1}{2} + 2 \frac{g}{l\omega^2} > \frac{a}{l} > \sqrt{2 \frac{g}{l\omega^2}},$$

или, производя простейшие преобразования,

$$\frac{l\omega}{2} + 2 \frac{g}{\omega} > a\omega > \sqrt{2gl}.$$

При $a \ll l$ левая часть неравенства выполняется всегда и остается только правая часть, которая означает, что верхнее неустойчивое положение маятника можно стабилизировать высокочастотными колебаниями точки подвеса при условии, что ее максимальная скорость $a\omega$ превышает скорость свободного падения маятника с высоты, равной его длине ($\sqrt{2gl}$). Впервые это свойство было установлено П. Л. Капицей [23].

Пример 2. Исследование устойчивости нулевого решения уравнения Хилла при параметрическом возбуждении по закону квазипрямоугольного синуса. Рассмотрим простейшую

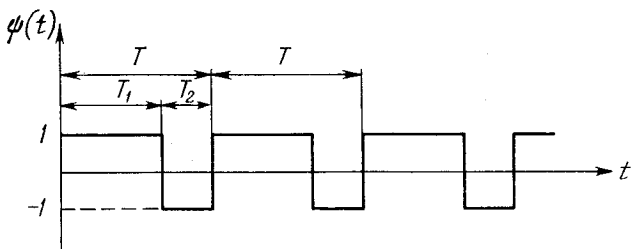


Рис. 7.12

систему, уравнение возмущенного движения которой описывается уравнением Хилла (7.76)

$$\ddot{x} + [\delta + \varepsilon\psi(t)]x = 0 \tag{7.109}$$

с функцией возбуждения $\psi(t)$, изменяющейся по закону квазипрямоугольного синуса (рис. 7.12). Период T функции возбужде-

ния $\psi(t)$ складывается из времени T_1 , когда функция $\psi(t)$ равна $+1$, и времени T_2 , когда $\psi(t) = -1$. При $T_1 = T_2$ имеем обычный прямоугольный синус.

К уравнению (7.109) сводится, в частности, изучение систем, жесткость которых периодически изменяется с помощью релейного устройства. Для нас эта задача представляет интерес не только потому, что ее решение может быть использовано для анализа устойчивости движения конкретных систем, но также потому, что на ней будет показано построение для одного периода $[0, T]$ фундаментальной матрицы решений $X(t)$, удовлетворяющей условию (7.55), построение матрицы $A = X(T)$, характеристического уравнения (7.64) и определение условий устойчивости решения $x = 0, \dot{x} = 0$.

В уравнении (7.109) число ε равно глубине пульсации, а число δ равно при $\delta > 0$ и $\varepsilon = 0$ квадрату частоты k собственных колебаний, т. е. $\delta = k^2$. Совместим начало отсчета времени t с началом какого-либо периода T . Тогда для первой части периода $0 \leq t \leq T_1$ уравнение (7.109) принимает вид

$$\ddot{x} + (k^2 + \varepsilon)x = 0 \quad (0 \leq t \leq T_1), \quad (7.110)$$

а для второй части периода

$$\ddot{x} + (k^2 - \varepsilon)x = 0 \quad (T_1 \leq t \leq T). \quad (7.111)$$

Рассмотрим сначала уравнение (7.110). Полагая, как и прежде, $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, мы сведем уравнение (7.110) к системе двух уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1^2 x_1 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (7.112)$$

где

$$k_1^2 = k^2 + \varepsilon. \quad (7.113)$$

Система (7.112) решается элементарно. Два линейно независимых решения этой системы, удовлетворяющих условиям (7.55), будут

$$\begin{aligned} x_{11} &= \cos k_1 t, & x_{12} &= \frac{1}{k_1} \sin k_1 t, \\ x_{21} &= -k_1 \sin k_1 t, & x_{22} &= \cos k_1 t \end{aligned} \quad (7.114)$$

(напомним, что первый индекс означает номер функции, второй — номер решения).

Таким образом, на первой части периода фундаментальная матрица решений (7.51) принимает вид

$$X(t) = \begin{vmatrix} \cos k_1 t & \frac{1}{k_1} \sin k_1 t \\ -k_1 \sin k_1 t & \cos k_1 t \end{vmatrix} \quad (0 \leq t \leq T_1). \quad (7.115)$$

Очевидно, что $X(0) = E$ (условие (7.55)).

Перейдем ко второй части периода $T_1 \leq t \leq T$. Уравнение (7.111) при прежней подстановке перейдет в систему вида (7.112) с заменой $k_1^2 = k^2 + \varepsilon$ на $k_2^2 = k^2 - \varepsilon$:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_2^2 x_1 \quad (T_1 \leq t \leq T). \quad (7.116)$$

В общем решении этой системы

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \cos k_2 (t - T_1) + C_2 \sin k_2 (t - T_1), \\ x_2 &= -k_2 C_1 \sin k_2 (t - T_1) + k_2 C_2 \cos k_2 (t - T_1) \end{aligned} \quad (7.117)$$

подберем постоянные интегрирования C_1 и C_2 так, чтобы оно определяло первое частное решение. Для этого решение (7.117) должно совпадать с решением x_{11} , x_{21} из (7.114) при $t = T_1$. Имеем

$$\cos k_1 T_1 = C_1, \quad -k_1 \sin k_1 T_1 = k_2 C_2.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 из этих равенств в (7.117), найдем первое частное решение уравнений (7.116) на втором участке периода $T_1 \leq t \leq T$ (мы выписываем сразу второе частное линейно независимое решение, полученное аналогичным образом):

$$\begin{aligned} x_{11} &= \cos k_1 T_1 \cos k_2 (t - T_1) - \frac{k_1}{k_2} \sin k_1 T_1 \sin k_2 (t - T_1), \\ x_{21} &= -k_2 \cos k_1 T_1 \sin k_2 (t - T_1) - k_1 \sin k_1 T_1 \cos k_2 (t - T_1), \\ x_{12} &= \frac{1}{k_1} \sin k_1 T_1 \cos k_2 (t - T_1) + \frac{1}{k_2} \cos k_1 T_1 \sin k_2 (t - T_1), \\ x_{22} &= -\frac{k_2}{k_1} \sin k_1 T_1 \sin k_2 (t - T_1) + \cos k_1 T_1 \cos k_2 (t - T_1). \end{aligned} \quad (7.118)$$

Эти выражения определяют элементы фундаментальной матрицы $X(t)$ на втором участке периода $T_1 \leq t \leq T$. Если в (7.118) положить $t = T$, то получим элементы матрицы $A = X(T) - \text{см. (7.64)}$. Составим характеристическое уравнение (7.64), учитывая, что $a_{kj} = x_{kj}(T)$:

$$\begin{vmatrix} x_{11}(T) - \rho & x_{12}(T) \\ x_{21}(T) & x_{22}(T) - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляя в это уравнение значения $x_{kj}(T)$ из (7.118) и учитывая равенства $k_1^2 = k^2 + \varepsilon$, $k_2^2 = k^2 - \varepsilon$, $T - T_1 = T_2$, непосредственными вычислениями найдем

$$\rho^2 + a\rho + 1 = 0, \quad (7.119)$$

где

$$a = 2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}} \sin k_1 T_1 \sin k_2 T_2 - \cos k_1 T_1 \cos k_2 T_2 \right], \quad (7.120)$$

$$\mu = \varepsilon/k^2 = \varepsilon/\delta. \quad (7.121)$$

В этом примере все коэффициенты характеристического уравнения получены с помощью непосредственных вычислений. Как и следует из общей теории уравнения Хилла, свободный член уравнения (7.119) равен единице (см. (7.78)). Для того чтобы движение было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|a| < 2$ (см. с. 242). В нашем случае условие устойчивости (простой, но не асимптотической) принимает вид

$$\left| \frac{\sin k_1 T_1 \sin k_2 T_2}{\sqrt{1 - \mu^2}} - \cos k_1 T_1 \cos k_2 T_2 \right| < 1. \quad (7.122)$$

Если все числа δ , ε , T_1 и T_2 заданы, то проверить это условие не представляет труда. Не останавливаясь на более подробном анализе неравенства (7.122), установим только условия возникновения параметрического резонанса при $\mu = \varepsilon/\delta \ll 1$. Пренебрегая в (7.122) всеми членами, содержащими μ в степени выше первой (отметим, что число μ входит в k_1 и k_2), и учитывая, что параметрический резонанс для уравнения Хилла возникает уже на границе области устойчивости (см. с. 241—242), получим

$$|\cos(k_1 T_1 + k_2 T_2)| = 1.$$

Отсюда

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 = \pi n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (7.123)$$

Учтем теперь значения k_1 и k_2

$$k_1 = \sqrt{k^2 + \varepsilon} = k\sqrt{1 + \mu}, \quad k_2 = \sqrt{k^2 - \varepsilon} = k\sqrt{1 - \mu}.$$

При $\mu = \varepsilon/k^2 = \varepsilon/\delta$ достаточно малом будем иметь

$$k_1 = k(1 + 1/2\mu), \quad k_2 = k(1 - 1/2\mu).$$

Подставляя эти значения для k_1 и k_2 в (7.123), найдем ($T_1 + T_2 = T$)

$$kT + 1/2\mu k(T_2 - T_1) = \pi n,$$

или, с точностью до главных членов,

$$\omega = 2 \frac{k}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (7.124)$$

где $\omega = 2\pi/T$ — частота пульсации, а $k = \sqrt{\delta}$ — частота собственных колебаний системы при отсутствии параметрического возбуждения.

Из выражения (7.124) видно, что при достаточно малой глубине пульсации ε параметрический резонанс наступает при бесчисленных значениях ее частоты ω . Заметим, что выражение (7.124) для критических значений частоты пульсации при параметрическом возбуждении по закону квазипрямоугольного синуса не зависит от соотношения частот периодов T_1 и T_2 и что оно в точности совпадает с соответствующими значениями критической частоты при параметрическом возбуждении по закону обычного синуса (косинуса). Действительно, если уравнение Матье записать в следующей форме:

$$\ddot{x} + (k^2 + \varepsilon \cos \omega t)x = 0,$$

где k — частота собственных колебаний системы при отсутствии параметрического возбуждения, то при переходе к безразмерному времени по формуле $\omega t = \tau$ мы получим каноническую форму (7.89) этого уравнения, в котором $\delta = k^2/\omega^2$. На с. 251 было показано, что при малом ε критические точки для δ определяются равенством $\delta = n^2/4$, или $k^2/\omega^2 = n^2/4$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Отсюда получим $\omega = 2k/n$, т. е. формулу (7.124).

В заключение этого примера заметим, что условие устойчивости (7.122) справедливо и для случая, когда одно из чисел δ , $\delta + \varepsilon = k_1^2$, и $\delta - \varepsilon = k_2^2$ или все они отрицательны. Для этого достаточно перейти от тригонометрических функций мнимых аргументов к гиперболическим функциям действительных величин.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 8.1. Введение

В большинстве случаев системы автоматического регулирования представляют сложные устройства, состоящие из объекта регулирования и регуляторов. Назначение последних состоит в том, чтобы непрерывно поддерживать в объекте регулирования установившийся режим работы или режим, изменяющийся по заданному закону. Все отклонения от заданного режима, возникающие в системе регулирования, должны быть с течением времени сведены практически к нулю. Иначе говоря, система регулирования должна быть асимптотически устойчива.

Начиная с работ И. А. Вышнеградского, о которых рассказывалось во введении и третьем примере § 4.5, при исследовании устойчивости систем автоматического регулирования применяется метод линеаризации с дальнейшим использованием различных критериев (Гурвица, Рауса, Найквиста, Михайлова и др.). Обоснованием этого метода служат теоремы Ляпунова об устойчивости движения по уравнениям первого приближения (см. § 4.3).

В 1944 г. появилась небольшая заметка А. И. Лурье и В. Н. Постникова [34], в которой для исследования устойчивости движения конкретной системы автоматического регулирования был применен прямой метод Ляпунова. Устойчивость рассматривалась в целом, т. е. при любых начальных возмущениях и любой нелинейности сервомотора, подчиненной некоторым условиям (такая устойчивость получила название *абсолютной устойчивости*).

В дальнейшем А. И. Лурье в ряде работ развил идеи, заложенные в первой публикации, построил функцию Ляпунова для общего случая, охватывающего весьма широкий класс регулируемых систем, и получил систему алгебраических уравнений, решение которой определяют достаточные условия абсолютной устойчивости. В монографии [33], опубликованной в 1951 г., А. И. Лурье довел применение прямого метода Ляпунова к исследованию

абсолютной устойчивости регулируемых систем до хорошо разработанного алгоритма.

Результаты, полученные А. И. Лурье, послужили отправной точкой для дальнейших исследований абсолютной устойчивости. В этой работе приняли активное участие ученые различных стран. Не имея возможности упомянуть всех авторов, отметим прежде всего работы советских ученых А. М. Летова [31], Е. А. Барбашина [5, 6], М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [2], В. А. Якубовича [50, 51, 52, 53], работы американских ученых Р. Э. Калмана [55], Ж. Ла-Салля и С. Лефшеца [29, 32], румынского ученого В. М. Попова [43]. Последнему принадлежит введение частотных методов в исследование абсолютной устойчивости, позволивших расширить класс рассматриваемых систем.

Учитывая характер настоящего руководства, в этой главе мы кратко изложим основные идеи и результаты А. И. Лурье.

§ 8.2. Дифференциальные уравнения возмущенного движения систем автоматического регулирования

Во многих случаях система автоматического регулирования состоит из объекта регулирования, чувствительных элементов (измерителей), суммирующего прибора, сервомотора и механизма обратной связи. Структурная схема такой системы изображена на рис. 8.1. Под регулятором понимается совокупность измерителей и суммирующего прибора; иногда в регулятор включают и сервомотор с механизмом обратной связи.

Параметры, характеризующие состояние объекта регулирования при нарушении установившегося режима работы, замеряются чувствительными элементами (измерителями), показания которых вместе с сигналом ξ механизма обратной связи подаются на суммирующий прибор. Последний вырабатывает команду σ , управляющую серводвигателем, который в свою очередь устанавливает в надлежащее положение регулирующей орган объекта регулирования и воздействует одновременно на механизм обратной связи.

Обозначим через x_1, \dots, x_n параметры, характеризующие состояние объекта регулирования, а также координаты и скорости чувствительных элементов.

Будем считать, что изменение этих величин при разомкнутой цепи (отключенном серводвигателе) описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \quad (k = 1, \dots, n).$$

При замкнутой цепи на изменение величин x_1, \dots, x_n будет влиять регулирующий орган. Обозначая через ξ

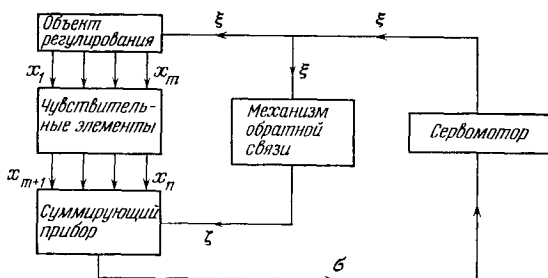


Рис. 8.1

параметр, характеризующий положение последнего, и учитывая предположение о линейности системы, получим дифференциальные уравнения объекта регулирования и чувствительных элементов при включенном серводвигателе:

$$\dot{x}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + b_k \xi \quad (k = 1, \dots, n). \quad (8.1)$$

В конкретных системах некоторые из коэффициентов a_{kj} и b_k будут, конечно, равны нулю, в частности, в уравнениях, соответствующих чувствительным элементам, постоянные $b_k = 0$.

Будем считать, что механизм обратной связи осуществляется с помощью жесткого выключателя. В этом случае выходная величина ζ механизма обратной связи будет пропорциональна его входной величине

$$\zeta = k\xi. \quad (8.2)$$

Суммирующий прибор, складывая показания чувствительных элементов, дает на вход сервомотора величину

$$\sigma = \sum_{j=1}^n c_j x_j - r \xi, \quad (8.3)$$

где c_j и r — передаточные числа.

Передаточное число r называется *коэффициентом обратной связи*. В разумно построенной системе регулирования коэффициент обратной связи положителен, т. е.

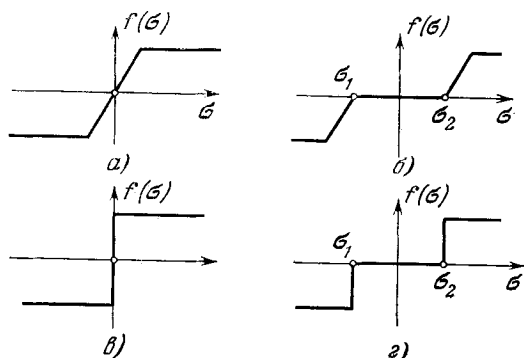


Рис. 8.2

$r > 0$. При отсутствии механизма обратной связи $r = 0$; кроме того, передаточные числа c_j , соответствующие параметрам объекта регулирования, также равны нулю.

Связь между входной величиной σ серводвигателя и его выходной величиной в случае непрямого регулирования выражается зависимостью

$$\dot{\xi} = f(\sigma), \quad (8.4)$$

где функция $f(\sigma)$ называется *характеристикой сервомотора*.

Характеристика сервомотора может быть линейной, но значительно чаще она носит нелинейный характер. На рис. 8.2 показаны некоторые типичные примеры нелинейности функции $f(\sigma)$. Характеристики a и b непрерывны, а другие две разрывны.

В дальнейшем будем предполагать, что характеристики $f(\sigma)$ удовлетворяют следующим условиям.

1. Функция $f(\sigma)$ определена и непрерывна при всех значениях σ ;

2. $f(0) = 0$;

3. $\sigma f(\sigma) > 0$ при любых $\sigma \neq 0$; другими словами, функция $f(\sigma)$ имеет тот же знак, что и σ , и в нуль обращается только в начале координат;

4. Интегралы

$$\int_0^{\infty} f(\sigma) d\sigma, \quad \int_{-\infty}^0 f(\sigma) d\sigma \quad (8.5)$$

расходятся.

Характеристики типа b и z имеют зону нечувствительности (в промежутке (σ_1, σ_2) значения функции $f(\sigma)$ равны нулю при $\sigma \neq 0$). Анализ решений и устойчивости систем, дифференциальные уравнения которых содержат функции с зоной нечувствительности и разрывной нелинейностью, нельзя рассматривать в рамках общей теории. Они требуют специального исследования, выходящего за рамки настоящей книги.

Второе и третье условия не требуют пояснения. Заметим только, что третьему условию не удовлетворяют характеристики с зоной нечувствительности, так как произведение $\sigma f(\sigma)$ равно нулю во всем промежутке (σ_1, σ_2) , где σ имеет значения, отличные от нуля.

Последнее, четвертое, условие практически всегда выполняется. Действительно, геометрически это условие означает, что площадь под характеристикой неограниченно возрастает при $\sigma \rightarrow \infty$. Так как участки характеристики, параллельные оси σ , для реальных сервомоторов неограниченно продолжаются вправо и влево (эти участки практически образуются за счет того, что орган, управляющий сервомотором, ложится на упоры), то четвертое условие фактически реализуется всегда. Однако мыслимы и другие сервомоторы, поэтому это условие следует предусмотреть (значение его будет объяснено в следующем параграфе).

Функции $f(\sigma)$, удовлетворяющие перечисленным условиям, называются *допустимыми характеристиками*.

Уравнения (8.1), (8.3) и (8.4) определяют возмущенное движение системы *непрямого* регулирования с одним регулирующим органом и жесткой обратной связью. Выпишем эти уравнения еще раз, собрав их вместе

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + b_k \xi, \\ \dot{\xi} &= f(\sigma), \\ \sigma &= \sum_{j=1}^n c_j x_j - r \xi. \end{aligned} \quad (8.6)$$

При *прямом* регулировании связь между выходной ξ и входной σ величинами серводвигателя осуществляется не через производную, а непосредственно:

$$\xi = f(\sigma).$$

Поэтому уравнения возмущенного движения системы *прямого* регулирования имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + b_k f(\sigma), \\ \sigma &= \sum_{j=1}^n c_j x_j. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Сформулируем теперь постановку вопроса.

Задача Лурье. *Независимо от начального состояния системы и конкретного выбора допустимой характеристики $f(\sigma)$ сервомотора найти необходимые и достаточные условия устойчивости системы (8.6) в целом.* Иначе говоря, требуется найти условия абсолютной устойчивости системы (8.6).

§ 8.3. Преобразование уравнений возмущенного движения системы регулирования к канонической форме

Прежде чем перейти к определению условий абсолютной устойчивости системы (8.6), займемся преобразованием ее. В матричной форме уравнения (8.6) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\xi, \\ \dot{\xi} &= f(\sigma), \\ \sigma &= c'x - r\xi. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Здесь $A = \| a_{kj} \|$ — квадратная матрица, x , b и c — матрицы-столбцы (c' — матрица, транспонированная с c , т. е. матрица-строка), r , ξ , σ и $f(\sigma)$ имеют прежние значения.

В уравнениях (8.8) неизвестными функциями времени являются матрица-столбец x и скалярная величина ξ . Перейдем к новым переменным по формулам:

$$\begin{aligned} y &= Ax + \xi b = \dot{x}, \\ \sigma &= c'x - r\xi. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Будем иметь

$$\begin{aligned}\dot{y} &= Ax + b\dot{\xi}, \\ \dot{\sigma} &= c'x - r\dot{\xi}.\end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнения (8.8) и равенства (8.9), получим

$$\begin{aligned}\dot{y} &= Ay + bf(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= c'y - rf(\sigma).\end{aligned}\tag{8.10}$$

Потребуем, чтобы определитель линейного преобразования (8.9) был отличен от нуля (см. понятие о сложных матрицах в § 5.2):

$$\det \begin{vmatrix} A & b \\ c' & -r \end{vmatrix} \neq 0$$

или более подробно

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & \dots & c_n & -r \end{vmatrix} \neq 0.\tag{8.11}$$

В этом предположении дифференциальные уравнения возмущенного движения (8.8) и (8.10) будут взаимно эквивалентны. Это означает, что из абсолютной устойчивости относительно переменных y и σ следует абсолютная устойчивость относительно переменных x и ξ и наоборот.

Заметим, что условие (8.11) не является жестким, так как элементы определителя зависят от параметров системы, которые всегда можно выбрать так, чтобы это условие выполнялось.

Условия устойчивости системы (8.10) можно искать в матричной форме, пользуясь некоторыми матричными соотношениями (см. [51, 52]). Если считать эти соотношения известными, то вывод условий абсолютной устойчивости будет простым. Однако простота вывода и самих условий устойчивости является кажущейся, так как доказательство матричных соотношений, на которые опирается вывод, и их явное выражение через параметры системы достаточно сложны. Поэтому остановимся на методе Лурье [33], состоящем в переходе к каноническим переменным.

Сделаем линейное преобразование

$$u = \Lambda y$$

с неособенной матрицей $\Lambda = \|\alpha_{kj}\|$. Будем иметь

$$y = \Lambda^{-1}u, \quad \dot{y} = \Lambda^{-1}\dot{u}.$$

После подстановки в уравнения (8.10) получим

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}\dot{u} &= A\Lambda^{-1}u + bf(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= c'\Lambda^{-1}u - rf(\sigma). \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение слева на матрицу Λ . Тогда, учитывая равенства $\Lambda\Lambda^{-1}u = Eu = u$, найдем

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Bu + hf(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= g'u - rf(\sigma), \end{aligned} \quad (8.12)$$

где

$$B = \Lambda A \Lambda^{-1}, \quad h = \Lambda b, \quad g = (\Lambda^{-1})'c. \quad (8.13)$$

Будем задавать не матрицу преобразования Λ , а матрицу B , считая, что она представляет нормальную форму Жордана для матрицы A (см. § 5.3). Тогда матрицы Λ и Λ^{-1} могут быть определены из уравнений (5.55) и (5.56):

$$B\Lambda = \Lambda A, \quad \Lambda^{-1}B = A\Lambda^{-1}, \quad \Lambda\Lambda^{-1} = E. \quad (8.14)$$

Если матрица преобразования Λ найдена, то обратную матрицу Λ^{-1} проще всего найти по формуле

$$\Lambda^{-1} = \|\alpha'_{kj}\| = \left\| \frac{\Lambda_{jk}}{\Delta} \right\|, \quad (8.15)$$

где α'_{kj} — элементы обратной матрицы Λ^{-1} , Λ_{jk} — алгебраические дополнения элементов α_{jk} матрицы Λ , а $\Delta = \det \Lambda$ (следует обратить внимание на расстановку индексов).

В дальнейшем будем считать, что все корни λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (8.16)$$

простые и имеют отрицательные вещественные части

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0,$$

причем в некоторых случаях будет допускаться один нулевой корень.

В сделанных предположениях матрица B имеет вид ¹⁾

$$B = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}. \quad (8.17)$$

Запишем уравнения (8.12) в скалярной форме

$$\begin{aligned} \dot{u}_k &= \lambda_k u_k + h_k f(\sigma) \quad (k = 1, \dots, n), \\ \dot{\sigma} &= \sum_{k=1}^n g_k u_k - r f(\sigma). \end{aligned} \quad (8.18)$$

В этих уравнениях некоторые коэффициенты h_k могут равняться нулю. Введем новые переменные z_k , положив

$$u_k = \begin{cases} h_k z_k, & \text{если } h_k \neq 0, \\ z_k, & \text{если } h_k = 0. \end{cases} \quad (8.19)$$

Тогда уравнения (8.17) примут свой окончательный вид эти уравнения называются *каноническими уравнениями системы регулирования*)

$$\begin{aligned} \dot{z}_k &= \lambda_k z_k + \delta_k f(\sigma) \quad (k = 1, \dots, n), \\ \dot{\sigma} &= \sum_{k=1}^n e_k z_k - r f(\sigma), \end{aligned} \quad (8.20)$$

где множители δ_k равны единице или нулю

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } h_k \neq 0, \\ 0, & \text{если } h_k = 0, \end{cases} \quad (8.21)$$

а коэффициенты e_k определяются равенствами

$$e_k = \begin{cases} g_k h_k, & \text{если } h_k \neq 0, \\ g_k, & \text{если } h_k = 0. \end{cases} \quad (8.22)$$

Отметим, что вещественным корням λ_k отвечают вещественные канонические переменные z_k и вещественные числа e_k ; комплексно-сопряженным корням $\lambda_k = \bar{\lambda}_{k+1}$ отвечают комплексно-сопряженные канонические переменные $z_k = \bar{z}_{k+1}$ и комплексно-сопряженные числа $e_k = \bar{e}_{k+1}$.

¹⁾ См. (5.35) и (5.32). В случае простых корней характеристического уравнения числа $e_1 = e_2 = \dots = e_n = 1$, поэтому каждая клетка J_k состоит из одного элемента λ_k .

Уравнения (8.20) совпадают по своей форме с уравнениями (8.18), но отличие их состоит в том, что в уравнениях (8.20) коэффициенты δ_k удовлетворяют соотношениям (8.21).

В заключение этого параграфа отметим, что существуют различные методы приведения уравнений систем автоматического регулирования к канонической форме (8.20). Здесь изложен наиболее общий метод, основанный на матричных уравнениях (8.14). Практическое применение этого метода будет разъяснено на примере.

§ 8.4. Построение функции Ляпунова

Пусть имеется s пар комплексно-сопряженных корней

$$(\lambda_1, \lambda_2), (\lambda_3, \lambda_4), \dots, (\lambda_{2s-1}, \lambda_{2s}),$$

которым отвечают s пар комплексно-сопряженных координат

$$(z_1, z_2), (z_3, z_4), \dots, (z_{2s-1}, z_{2s})$$

и $n - 2s$ вещественных корней

$$\lambda_{2s+1}, \lambda_{2s+2}, \dots, \lambda_n,$$

которым отвечают вещественные координаты

$$z_{2s+1}, z_{2s+2}, \dots, z_n.$$

Для нахождения достаточных условий абсолютной устойчивости движения А. И. Лурье предложил использовать функцию Ляпунова в следующей форме:

$$V = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_k z_k a_j z_j}{\lambda_k + \lambda_j} - \varepsilon \sum_{k=1}^s z_{2k-1} z_{2k} - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n-2s} z_{2s+k}^2 - \int_0^{\sigma} f(\sigma) d\sigma. \quad (8.23)$$

Здесь a_{2s+1}, \dots, a_n — вещественные, а $a_1, a_2, \dots, a_{2s-1}, a_{2s}$ — попарно-сопряженные комплексные числа, которыми мы распорядимся в дальнейшем соответствующим образом; положительное число ε может быть выбрано сколь угодно малым.

Докажем прежде всего, что функция V определенно-отрицательна. Действительно, из условия $\sigma f(\sigma) > 0$ следует, что последнее слагаемое представляет определенно-отрицательную функцию переменной σ . Совокупность членов, содержащих множитель ε , определенно-отрица-

Внесем в это выражение для \dot{V} значения производных \dot{z} и $\dot{\sigma}$ из уравнений (8.20). Получим

$$\begin{aligned} \dot{V} = & 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_k z_k}{\lambda_k + \lambda_j} a_j [\lambda_j z_j + \delta_j f(\sigma)] - \\ & - \varepsilon \sum_{k=1}^s \{z_{2k} [\lambda_{2k-1} z_{2k-1} + \delta_{2k-1} f(\sigma)] + z_{2k-1} [\lambda_{2k} z_{2k} + \delta_{2k} f(\sigma)]\} - \\ & - \varepsilon \sum_{k=1}^{n-2s} z_{2s+k} [\lambda_{2s+k} z_{2s+k} + \delta_{2s+k} f(\sigma)] - f(\sigma) \left[\sum_{k=1}^n e_k z_k - r f(\sigma) \right] \end{aligned}$$

или, группируя члены,

$$\begin{aligned} \dot{V} = & 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_k + \lambda_j} a_k z_k a_j z_j + r f^2(\sigma) - \varepsilon \sum_{k=1}^{n-2s} \lambda_{2s+k} z_{2s+k}^2 - \\ & - \varepsilon \sum_{k=1}^s (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}) z_{2k-1} z_{2k} - \\ & - \left\{ \sum_{k=1}^s z_{2k} \left[\varepsilon \delta_{2k-1} + e_{2k} - 2a_{2k} \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_{2k} + \lambda_j} \right] + \right. \\ & + \sum_{k=1}^s z_{2k-1} \left[\varepsilon \delta_{2k} + e_{2k-1} - 2a_{2k-1} \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_{2k-1} + \lambda_j} \right] + \\ & \left. + \sum_{k=1}^{n-2s} z_{2s+k} \left[\varepsilon \delta_{2s+k} + e_{2s+k} - 2a_{2s+k} \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_{2s+k} + \lambda_j} \right] \right\} f(\sigma). \end{aligned}$$

Поясним, что при группировке членов, содержащих произведение функции $f(\sigma)$ на двойную сумму и на параметры e_k , суммирование по k разбито на три суммы.

Займемся теперь преобразованием двойной суммы. Имеем

$$\begin{aligned} 2 \sum \sum &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_k + \lambda_j} a_k z_k a_j z_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_j} a_k z_k a_j z_j = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k z_k a_j z_j = \sum_{k=1}^n a_k z_k \sum_{j=1}^n a_j z_j = \left(\sum_{k=1}^n a_k z_k \right)^2. \end{aligned}$$

Присоединим к двойной сумме слагаемое $r f^2(\sigma)$ и

Внесем в это выражение для \dot{V} значения производных \dot{z} и $\dot{\sigma}$ из уравнений (8.20). Получим

$$\begin{aligned} \dot{V} = & 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_k z_k}{\lambda_k + \lambda_j} a_j [\lambda_j z_j + \delta_j f(\sigma)] - \\ & - \varepsilon \sum_{k=1}^s \{z_{2k} [\lambda_{2k-1} z_{2k-1} + \delta_{2k-1} f(\sigma)] + z_{2k-1} [\lambda_{2k} z_{2k} + \delta_{2k} f(\sigma)]\} - \\ & - \varepsilon \sum_{k=1}^{n-2s} z_{2s+k} [\lambda_{2s+k} z_{2s+k} + \delta_{2s+k} f(\sigma)] - f(\sigma) \left[\sum_{k=1}^n e_k z_k - r f(\sigma) \right] \end{aligned}$$

или, группируя члены,

$$\begin{aligned} \dot{V} = & 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_k + \lambda_j} a_k z_k a_j z_j + r f^2(\sigma) - \varepsilon \sum_{k=1}^{n-2s} \lambda_{2s+k} z_{2s+k}^2 - \\ & - \varepsilon \sum_{k=1}^s (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}) z_{2k-1} z_{2k} - \\ & - \left\{ \sum_{k=1}^s z_{2k} \left[\varepsilon \delta_{2k-1} + e_{2k} - 2a_{2k} \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_{2k} + \lambda_j} \right] + \right. \\ & + \sum_{k=1}^s z_{2k-1} \left[\varepsilon \delta_{-k} + e_{2k-1} - 2a_{2k-1} \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_{2k-1} + \lambda_j} \right] + \\ & \left. + \sum_{k=1}^{n-2s} z_{2s+k} \left[\varepsilon \delta_{2s+k} + e_{2s+k} - 2a_{2s+k} \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_{2s+k} + \lambda_j} \right] \right\} f(\sigma). \end{aligned}$$

Поясним, что при группировке членов, содержащих произведение функции $f(\sigma)$ на двойную сумму и на параметры e_k , суммирование по k разбито на три суммы.

Займемся теперь преобразованием двойной суммы.

Имеем

$$\begin{aligned} 2 \sum \sum & = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_k + \lambda_j} a_k z_k a_j z_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_j} a_k z_k a_j z_j = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k z_k a_j z_j = \sum_{k=1}^n a_k z_k \sum_{j=1}^n a_j z_j = \left(\sum_{k=1}^n a_k z_k \right)^2. \end{aligned}$$

Приєднадим к двойной сумме слагаемое $r f^2(\sigma)$ и

представим оба члена в следующей форме:

$$\begin{aligned} 2 \sum \sum + r f^2(\sigma) &= \left(\sum_{k=1}^n a_k z_k \right)^2 + r f^2(\sigma) = \\ &= \left[\sum_{k=1}^n a_k z_k + \sqrt{r} f(\sigma) \right]^2 - 2 \sqrt{r} f(\sigma) \sum_{k=1}^n a_k z_k. \end{aligned}$$

Отнесем выделенную здесь группу слагаемых с произведениями $z_k f(\sigma)$ к соответствующим слагаемым в производной \dot{V} . Тогда получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left[\sum_{k=1}^n a_k z_k + \sqrt{r} f(\sigma) \right]^2 - \\ &\quad - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}) z_{2k-1} z_{2k} + \sum_{k=1}^{n-2s} \lambda_{2s+k} z_{2s+k}^2 \right] - \\ &\quad - \left\{ \sum_{k=1}^s z_{2k} \left[\varepsilon \delta_{2k-1} + e_{2k} + 2a_{2k} \left(\sqrt{r} - \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_{2k} + \lambda_j} \right) \right] \right\} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^s z_{2k-1} \left[\varepsilon \delta_{2k} + e_{2k-1} + 2a_{2k-1} \left(\sqrt{r} - \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_{2k-1} + \lambda_j} \right) \right] + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-2s} z_{2s+k} \left[\varepsilon \delta_{2s+k} + e_{2s+k} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_{2s+k} \left(\sqrt{r} - \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_{2s+k} + \lambda_j} \right) \right] \Big\} f(\sigma). \quad (8.24) \end{aligned}$$

Для того чтобы знак производной \dot{V} не зависел от функции $f(\sigma)$, выберем постоянные числа a_1, a_2, \dots, a_n так, чтобы множители при z_{2k}, z_{2k-1} и z_{2s+k} обратились в нуль, т. е. подчиним эти числа n условиям;

$$\begin{aligned} \varepsilon \delta_{2k-1} + e_{2k} + 2a_{2k} \left(\sqrt{r} - \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_{2k} + \lambda_j} \right) &= 0 \quad (k = 1, \dots, s), \\ \varepsilon \delta_{2k} + e_{2k-1} + 2a_{2k-1} \left(\sqrt{r} - \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_{2k-1} + \lambda_j} \right) &= 0 \quad (k = 1, \dots, s), \\ \varepsilon \delta_{2s+k} + e_{2s+k} + 2a_{2s+k} \left(\sqrt{r} - \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_{2s+k} + \lambda_j} \right) &= \\ &= 0 \quad (k = 1, \dots, n - 2s). \quad (8.25) \end{aligned}$$

При таких a_1, a_2, \dots, a_n производная \dot{V} примет вид

$$\dot{V} = \left[\sum_{k=1}^n a_k z_k + \sqrt{r} f(\sigma) \right]^2 - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}) z_{2k-1} z_{2k} + \sum_{k=1}^{n-2s} \lambda_{2s+k} z_{2s+k}^2 \right]. \quad (8.26)$$

Первое слагаемое не отрицательно (по условию комплексные слагаемые входят в сумму $\sum a_k z_k$ попарно с сопряженными, поэтому эта сумма представляет вещественное число). Кроме того, по условию $\varepsilon > 0$, числа $\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}$ и λ_{2s+k} отрицательны ($\lambda_{2k} = \bar{\lambda}_{2k-1}$ и $\text{Re } \lambda_k < 0$), а множители $z_{2k-1} z_{2k}$ и z_{2s+k}^2 — положительные вещественные числа (по условию $z_{2k} = \bar{z}_{2k-1}$, z_{2s+k} вещественны). Отсюда следует, что при всех a_1, a_2, \dots, a_n , удовлетворяющих уравнениям (8.25), производная \dot{V} будет определено-положительной функцией переменных z_1, \dots, z_n и σ независимо от вида допустимой характеристики $f(\sigma)$. Кроме того, функция V определено-отрицательна и при выполнении условия (8.5) она удовлетворяет всем требованиям теоремы Барбашина — Красовского (см. § 2.3) (квадратичные формы, входящие в функцию (8.23), стремятся к бесконечности при $|z| \rightarrow \infty$, а интеграл стремится к бесконечности при $|\sigma| \rightarrow \infty$ в силу условия (8.5)).

Прежде чем перейти к выводам, сделаем одно замечание относительно уравнений (8.25). Положительное число ε можно выбрать сколь угодно малым. Поэтому в силу непрерывной зависимости корней уравнения от его коэффициентов наличие числа ε не может изменить характера этих корней. На этом основании слагаемые $\varepsilon \delta_k$ можно просто отбросить и вместо уравнений (8.25) рассматривать следующие уравнения (при $\varepsilon = 0$ все уравнения имеют одинаковую структуру):

$$e_k + 2a_k \left(\sqrt{r} - \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_k + \lambda_j} \right) = 0 \quad (k=1, \dots, n). \quad (8.27)$$

Теперь можно сформулировать теорему.

Теорема Лурье. Если система квадратных уравнений (8.27) имеет хотя бы одно решение a_1, a_2, \dots, a_n , в котором комплексно-сопряженным значениям $\lambda_k = \bar{\lambda}_{k+1}$ ($k = 1, 3, \dots, 2s-1$) корней характеристического уравне-

ния (8.16) отвечают комплексно-сопряженные числа $a_k = \bar{a}_{k+1}$ ($k = 1, 3, \dots, 2s - 1$), а вещественным корням λ_{2s+k} ($k = 1, \dots, n - 2s$) отвечают вещественные числа a_{2s+k} ($k = 1, \dots, n - 2s$), то система регулирования (8.20) абсолютно устойчива.

Заметим, что определять корни уравнений (8.27) не нужно, достаточно найти условия, которым должны удовлетворять параметры системы, чтобы соответствующее решение существовало.

До сих пор мы предполагали, что все корни характеристического уравнения (8.16) различны и имеют отрицательные вещественные части. Рассмотрим теперь случай, когда среди этих корней имеется один нулевой корень, а остальные корни удовлетворяют прежним условиям. В этих предположениях уравнения возмущенного движения (8.20) примут вид (предполагаем, что $\lambda_n = 0$)

$$\begin{aligned} \dot{z}_k &= \lambda_k z_k + \delta_k f(\sigma) \quad (k = 1, \dots, n-1), \\ \dot{z}_n &= f(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= \sum_{k=1}^{n-1} e_k z_k + e_n z_n - r f(\sigma). \end{aligned} \quad (8.28)$$

Число δ_n не должно равняться нулю, так как в противном случае $\dot{z}_n = 0$ и $z_n = \text{const}$, т. е. будет отсутствовать асимптотическая устойчивость. Поэтому на основании условия (8.21) полагаем $\delta_n = 1$.

Докажем теперь, что коэффициент e_n должен быть отрицательным. Действительно, рассмотрим линейную характеристику

$$f(\sigma) = k\sigma,$$

принадлежащую к классу допустимых характеристик.

Из условия $\sigma f(\sigma) = k\sigma^2 > 0$ следует, что $k > 0$. Составим характеристическое уравнение системы (8.28) при $f(\sigma) = k\sigma$ (напомним, что $\lambda_n = 0$, $\delta_n = 1$):

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & -k\delta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda - \lambda_{n-1} & 0 & -k\delta_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & -k \\ -e_1 & \dots & -e_{n-1} & -e_n & \lambda + kr \end{vmatrix} = 0.$$

Если раскрыть определитель, то коэффициент при старшем члене будет равен $+1$. Найдем свободный член

$a_n = \Delta(0)$. Имеем

$$a_n = \Delta(0) = \begin{vmatrix} -\lambda_1 & \dots & 0 & 0 & -k\delta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\lambda_{n-1} & 0 & -k\delta_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -k \\ -e_1 & \dots & -e_{n-1} & -e_n & kr \end{vmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель по элементам предпоследней строки, а полученный при этом минор — по элементам последнего столбца, найдем

$$a_n = -ke_n (-1)^{n-1} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}.$$

По условию все вещественные части корней $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ отрицательны, следовательно, произведение $(-1)^{n-1} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}$ будет положительно. Учитывая к тому же, что $k > 0$, найдем, что знак свободного члена характеристического уравнения для линейной характеристики совпадает со знаком $-e_n$. Из условия Гурвица должно быть $a_n > 0$, следовательно, $e_n < 0$, что и доказывает сделанное замечание.

Функцию Ляпунова для этого случая можно взять в следующей форме (ср. с уравнением (8.23)):

$$V = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_k z_k a_j z_j}{\lambda_k + \lambda_j} - \varepsilon \sum_{k=1}^s z_{2k-1} z_{2k} - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n-1-2s} z_{2s+k}^2 + \frac{1}{2} e_n z_n^2 - \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma. \quad (8.29)$$

При $e_n < 0$ это будет определенно-отрицательная функция всех $n+1$ переменных $z_1, \dots, z_{n-1}, z_n, \sigma$. Производная по времени от функции V , вычисленная в силу уравнений возмущенного движения (8.28), будет иметь тот же вид, что и (8.24), если заменить в ней n на $n-1$; переменная же z_n в выражение \dot{V} не войдет. Поэтому если подчинить постоянные числа a_1, a_2, \dots, a_{n-1} условиям (8.27), то производная \dot{V} будет знакоопределенной функцией n переменных $z_1, \dots, z_{n-1}, \sigma$ и знакопостоянной функцией всех $n+1$ переменных $z_1, \dots, z_{n-1}, z_n, \sigma$.

Производная \dot{V} обращается в нуль при $z_1 = \dots = z_{n-1} = \sigma = 0$, т. е. на оси z_n . Так как эта ось не является целой траекторией возмущенного движения (функции $z_1 = \dots = z_{n-1} = \sigma = 0$ не обращают урав-

нения (8.28) в тождества), то выполнены условия теоремы Барбашина — Красовского об асимптотической устойчивости в целом (см. § 2.3).

Из всего изложенного следует, что при наличии одного нулевого корня критерии абсолютной устойчивости получаются из квадратных уравнений (8.27), но с заменой n на $n - 1$. Кроме того, нужно потребовать, чтобы коэффициент e_n удовлетворял условию

$$e_n < 0. \quad (8.30)$$

В заключение этого параграфа остановимся кратко на системе прямого регулирования. В канонических переменных уравнения (8.7) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_k &= \lambda_k z_k + \delta_k f(\sigma), \\ \sigma &= \sum_{k=1}^n e_k z_k. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Функцию Ляпунова для этой системы можно взять в форме (8.23), только без интеграла. Тогда, повторяя почти в точности все выкладки, придем к следующей системе квадратных уравнений для определения постоянных a_1, \dots, a_n :

$$-2a_k \sum_{j=1}^n \frac{a_j \delta_j}{\lambda_k + \lambda_j} + e_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (8.32)$$

Если существует решение этих уравнений, удовлетворяющее вышеупомянутым условиям, то система регулирования (8.31), а вместе с ней и система (8.7) будут абсолютно устойчивы.

§ 8.5. Определение условий абсолютной устойчивости. Пример

В общем случае решение системы квадратных уравнений (8.27) представляет значительные трудности. К настоящему времени существуют обозримые решения для $n \leq 6$. Мы рассмотрим частный, но имеющий большое значение для многочисленных приложений случай двух квадратных уравнений (8.27); при этом будем предполагать, что $\delta_1 = \delta_2 = 1$ (см. равенства (8.21)). Положив

в уравнениях (8.27) $k = 1$, а затем $k = 2$, получим

$$\begin{aligned} -\frac{a_1^2}{\lambda_1} + 2a_1 \sqrt{r} - 2 \frac{a_1 a_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + e_1 &= 0, \\ -\frac{a_2^2}{\lambda_2} + 2a_2 \sqrt{r} - 2 \frac{a_1 a_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + e_2 &= 0. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Требуется определить, каким условиям должны удовлетворять числа λ_1 , λ_2 , e_1 , e_2 и r , чтобы эти уравнения имели решение указанного ранее вида. Следуя А. И. Лурье (см. [33]) преобразуем уравнения (8.33). Для этого разделим сначала первое уравнение на λ_1 , а второе на λ_2 и полученные результаты сложим почленно. Тогда получим

$$\begin{aligned} -\left(\frac{a_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{a_2^2}{\lambda_2^2}\right) + 2\sqrt{r}\left(\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2}\right) - \\ - 2 \frac{a_1 a_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} = 0. \end{aligned}$$

Третий член, очевидно, равен $-2a_1 a_2 / \lambda_1 \lambda_2$. Объединяя его с первым членом, получим

$$\left(\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2}\right)^2 - 2\sqrt{r}\left(\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2}\right) - \frac{e_1}{\lambda_1} - \frac{e_2}{\lambda_2} = 0.$$

Это равенство можно записать еще и так:

$$\left(\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} - \sqrt{r}\right)^2 = \Gamma^2, \quad (8.34)$$

где

$$\Gamma^2 = \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + r. \quad (8.35)$$

Если λ_1 и λ_2 вещественны, то числа a_1 и a_2 должны быть тоже вещественными, если же λ_1 и λ_2 комплексно-сопряжены, то a_1 и a_2 должны тоже быть комплексно-сопряженными числами. Поэтому величина, стоящая в круглых скобках равенства (8.34), вещественная, а ее квадрат должен быть положительным числом. На этом основании правую часть равенства (8.35) необходимо подчинить условию

$$\Gamma^2 = \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + r > 0. \quad (8.36)$$

Считая в дальнейшем, что это условие выполнено, положим $\Gamma = +\sqrt{\Gamma^2}$. Тогда одно квадратное уравнение

(8.34) распадается на два линейных уравнения

$$\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} = \Gamma + \sqrt{r}, \quad \frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} = -\Gamma + \sqrt{r}. \quad (8.37)$$

Вычтем теперь почленно из первого уравнения (8.33) второе уравнение

$$-\left(\frac{a_1^2}{\lambda_1} - \frac{a_2^2}{\lambda_2}\right) + 2\sqrt{r}(a_1 - a_2) + e_1 - e_2 = 0.$$

Легко видеть, что это равенство можно представить в следующей форме:

$$-\lambda_1\left(\sqrt{r} - \frac{a_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(\sqrt{r} - \frac{a_2}{\lambda_2}\right)^2 = r(\lambda_2 - \lambda_1) + e_2 - e_1. \quad (8.38)$$

Два линейных уравнения (8.37) и одно квадратное уравнение (8.38) эквивалентны двум квадратным уравнениям (8.33).

Рассмотрим вначале случай, когда оба корня λ_1 и λ_2 — комплексно-сопряженные числа. Введем новые переменные x и y , определив их равенствами

$$\sqrt{r} - \frac{a_1}{\lambda_1} = x + iy, \quad \sqrt{r} - \frac{a_2}{\lambda_2} = x - iy. \quad (8.39)$$

В новых переменных уравнения (8.37) и (8.38) примут вид

$$\begin{aligned} 2x &= \sqrt{r} - \Gamma, \quad 2x = \sqrt{r} + \Gamma, \\ (\lambda_2 - \lambda_1)(x^2 - y^2) - 2(\lambda_1 + \lambda_2)xyi &= r(\lambda_2 - \lambda_1) + e_2 - e_1. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Разделим третье уравнение на $(\lambda_2 - \lambda_1)$:

$$x^2 - y^2 + 2\kappa xy = r + \frac{e_2 - e_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

где в сделанных предположениях коэффициент

$$\kappa = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} i \quad (8.41)$$

является вещественным.

Последнее уравнение представим в следующем виде:

$$(1 + \kappa^2)x^2 - (\kappa x - y)^2 = r + \frac{e_2 - e_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Введем еще одну переменную z , положив

$$\kappa x - y = \sqrt{1 + \kappa^2}z.$$

Теперь уравнения (8.40) примут свою окончательную форму

$$\begin{aligned} 2x &= \sqrt{r} - \Gamma, \quad 2x = \sqrt{r} + \Gamma, \\ z^2 - x^2 &= \theta, \end{aligned} \quad (8.42)$$

где вещественное число θ определено равенством

$$\theta = -\frac{1}{1+x^2} \left(r + \frac{e_2 - e_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) = \frac{r(\lambda_2 - \lambda_1)^2 + (e_2 - e_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}{4\lambda_1\lambda_2}. \quad (8.43)$$

Уравнения (8.42) получены из уравнений (8.33) в предположении, что корни λ_1 и λ_2 комплексно-сопряженные. Легко видеть, что точно такие же уравнения мы получим и при вещественных корнях λ_1 и λ_2 . Нужно только в равенствах (8.39) заменить $x \pm iy$ на $x \pm y$, в равенстве (8.41) отбросить число i , а переменную z определить равенством $\kappa x + y = \sqrt{\kappa^2 - 1} z$. При этом параметр θ будет по-прежнему определяться выражением (8.43). Таким образом, уравнения (8.42) эквивалентны уравнениям (8.33) при любой структуре корней λ_1 и λ_2 (общие предположения о том, что $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$ и что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, остаются в силе).

На основании теоремы Лурье можно сделать следующий вывод: *если уравнения (8.42) имеют хотя бы одно вещественное решение относительно переменной z , то система регулирования абсолютно устойчива* (переменная x , согласно первым двум уравнениям, принимает только вещественные значения).

Из первых двух уравнений (8.42) найдем

$$x = \frac{1}{2} (\sqrt{r} \pm \Gamma).$$

Внесем это выражение для x в последнее уравнение и решим его относительно z^2 :

$$z^2 = \theta + \frac{1}{4} (\sqrt{r} \pm \Gamma)^2. \quad (8.44)$$

Из этого равенства видно, что при $\theta > 0$ величина z^2 будет положительна, а z вещественно. Это означает, что при $\theta > 0$ система регулирования абсолютно устойчива.

Рассмотрим теперь случай $\theta < 0$. Из равенства (8.44) видно, что для вещественности переменной z нужно потребовать, чтобы параметры Γ и θ удовлетворяли

условию

$$\theta + \frac{1}{4} (\sqrt{r} \pm \Gamma)^2 > 0.$$

Учитывая, что $\Gamma > 0$, достаточно в скобках взять верхний знак. Таким образом, при $\theta < 0$ система регулирования будет абсолютно устойчива, если параметры системы r , Γ и θ удовлетворяют условию

$$(\Gamma + \sqrt{r})^2 > -4\theta. \quad (8.45)$$

Если вместо параметра Γ ввести новый параметр

$$\begin{aligned} \Psi &= \Gamma + \sqrt{r} = \\ &= \sqrt{r + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2}} + \sqrt{r}, \end{aligned} \quad (8.46)$$

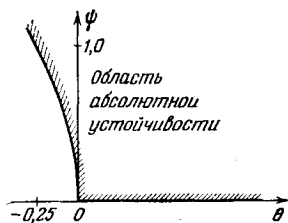


Рис. 8.3

то достаточное условие абсолютной устойчивости системы при $\theta < 0$ принимает вид

$$\Psi^2 > -4\theta. \quad (8.47)$$

К этому условию необходимо присоединить общее условие (8.36).

Область абсолютной устойчивости на плоскости параметров θ и Ψ изображена на рис. 8.3.

Пример. Непрямое регулирование двигателя с жесткой обратной связью. На рис. 8.4 и 8.5 показаны принципиальная и структурная схемы непрямого регулирования двигателя с жесткой обратной связью. Отличие от прямого регулирования (см. пример 3 § 4.5) состоит в том, что перемещение муфты центробежного устройства (измерителя угловой скорости двигателя) передается на дроссельную заслонку не прямо, а через золотник (суммирующий прибор) и сервомотор (гидравлический двигатель). Кроме того, шток серводвигателя, воздействующий на дроссельную заслонку, связан с рычагом жесткой обратной связи.

Перейдем к составлению уравнений возмущенного движения системы. Уравнение двигателя было получено ранее при рассмотрении примера 3 § 4.5. Пренебрегая моментом сопротивления M_2 (ω) и полагая, как и прежде, $z = \omega - \omega_0$, где ω_0 — угловая скорость двигателя в установившемся движении, будем иметь

$$T_0 \frac{dz}{dt} = -k_0 z.$$

Здесь T_0 — постоянная времени, характеризующая момент инерции вращающихся частей двигателя.

Напишем уравнение центробежного регулятора вместе с демпфером (см. равенство (4.45)):

$$T_1^2 \ddot{x} + T_2 \dot{x} + x = k_1 z.$$

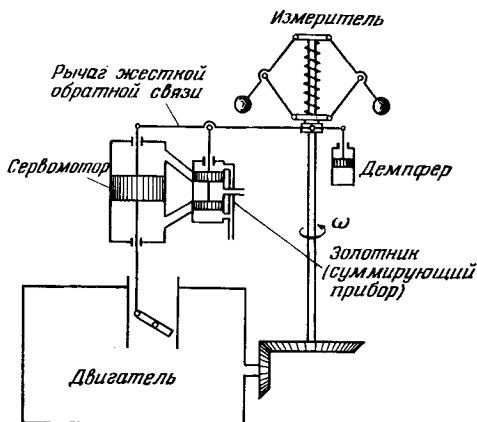


Рис. 8.4

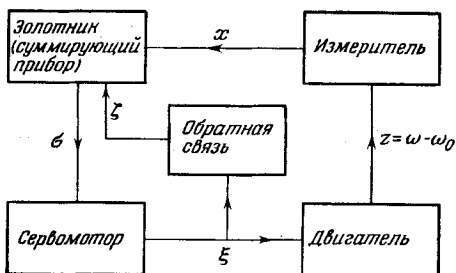


Рис. 8.5

Уравнение золотника (суммирующего прибора) имеет вид

$$\sigma = x - \zeta,$$

а уравнение сервомотора

$$\dot{\xi} = f(\sigma).$$

Если ввести обозначения $x_1 = \frac{T_0}{k_0} z$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = x$, то уравнения движения всей системы приводятся к виду (8.6):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\xi, \quad \dot{x}_2 = a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + a_3 x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_2, \quad \dot{\xi} = f(\sigma), \quad \sigma = x_3 - \xi, \end{aligned}$$

где

$$a_1 = \frac{k_1 k_0}{T_1^2 T_0}, \quad 2a_2 = -\frac{T_2}{T_1^2}, \quad a_3 = -\frac{1}{T_1^2}. \quad (8.48)$$

Выпишем матрицы A , b и c . Имеем

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 2a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Составим уравнение (8.16) и найдем его корни:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ a_1 & 2a_2 - \lambda & a_3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2a_2\lambda - a_3) = 0, \quad (8.49)$$

$$\lambda_{1,2} = a_2 \pm \sqrt{a_2^2 + a_3}, \quad \lambda_3 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2a_2, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -a_3, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 2\sqrt{a_2^2 + a_3}. \quad (8.50)$$

Пользуясь формулой (8.17), составим матрицу B :

$$B = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислим произведения BA и LA :

$$BA = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 \alpha_{11} & \lambda_1 \alpha_{12} & \lambda_1 \alpha_{13} \\ \lambda_2 \alpha_{21} & \lambda_2 \alpha_{22} & \lambda_2 \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$LA = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 2a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \alpha_{12} & 2a_2 \alpha_{12} + \alpha_{13} & a_3 \alpha_{12} \\ a_1 \alpha_{22} & 2a_2 \alpha_{22} + \alpha_{23} & a_3 \alpha_{22} \\ a_1 \alpha_{32} & 2a_2 \alpha_{32} + \alpha_{33} & a_3 \alpha_{32} \end{vmatrix}.$$

Так как матрицы BA и LA , согласно (8.14), равны, то должны быть равны соответствующие элементы:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \alpha_{11} &= a_1 \alpha_{12}, & \lambda_2 \alpha_{21} &= a_1 \alpha_{22}, & a_1 \alpha_{32} &= 0, \\ \lambda_1 \alpha_{12} &= 2a_2 \alpha_{12} + \alpha_{13}, & \lambda_2 \alpha_{22} &= 2a_2 \alpha_{22} + \alpha_{23}, & 2a_2 \alpha_{32} + \alpha_{33} &= 0, \\ \lambda_1 \alpha_{13} &= a_3 \alpha_{12}, & \lambda_2 \alpha_{23} &= a_3 \alpha_{22}, & a_3 \alpha_{32} &= 0. \end{aligned}$$

Из этих девяти уравнений независимых только шесть (в каждой группе среднее уравнение является следствием верхнего и нижнего уравнений, а также уравнения (8.49)).

Положим $\alpha_{11} = a_1$, $\alpha_{21} = a_1$, $\alpha_{31} = 1$. Тогда $\alpha_{12} = \lambda_1$, $\alpha_{13} = a_3$, $\alpha_{22} = \lambda_2$, $\alpha_{23} = a_3$, $\alpha_{32} = \alpha_{33} = 0$ и, следовательно,

$$L = \begin{vmatrix} a_1 & \lambda_1 & a_3 \\ a_1 & \lambda_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления обратной матрицы найдем $\Delta = \det \Lambda$ и соответствующие алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned}\Delta &= \det \Lambda = a_3 (\lambda_1 - \lambda_2), \\ \Lambda_{11} &= 0, \Lambda_{21} = 0, \Lambda_{31} = a_3 (\lambda_1 - \lambda_2), \\ \Lambda_{12} &= a_3, \Lambda_{22} = -a_3, \Lambda_{32} = 0, \\ \Lambda_{13} &= -\lambda_2, \Lambda_{23} = \lambda_1, \Lambda_{33} = -a_1 (\lambda_1 - \lambda_2).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\Lambda^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & 0 \\ -\frac{\lambda_2}{a_3 (\lambda_1 - \lambda_2)} & \frac{\lambda_1}{a_3 (\lambda_1 - \lambda_2)} & -\frac{a_1}{a_3} \end{vmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\Lambda \Lambda^{-1} = E$. Для перехода к уравнениям (8.18) найдем по формулам (8.13) матрицы h и g :

$$h = \Lambda b = \begin{vmatrix} -a_1 \\ -a_1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad g = (\Lambda^{-1})' c = \begin{vmatrix} -\frac{\lambda_2}{a_3 (\lambda_1 - \lambda_2)} \\ \frac{\lambda_1}{a_3 (\lambda_1 - \lambda_2)} \\ -\frac{a_1}{a_3} \end{vmatrix}.$$

Теперь можно перейти к уравнениям в переменных u_1, u_2, u_3, σ (см. уравнения (8.18)). Имеем

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= \lambda_1 u_1 + h_1 f(\sigma), \quad \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 + h_2 f(\sigma), \\ \dot{u}_3 &= h_3 f(\sigma), \quad \dot{\sigma} = g_1 u_1 + g_2 u_2 + g_3 u_3 - f(\sigma),\end{aligned}$$

где h_k и g_k — элементы матриц h и g соответственно. По формулам (8.19) перейдем к каноническим переменным. Полагаем

$$u_1 = h_1 z_1, \quad u_2 = h_2 z_2, \quad u_3 = h_3 z_3.$$

После подстановки получим канонические уравнения

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + f(\sigma), \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + f(\sigma), \quad \dot{z}_3 = f(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= e_1 z_1 + e_2 z_2 + e_3 z_3 - f(\sigma).\end{aligned}$$

В этих уравнениях

$$\begin{aligned}e_1 &= h_1 g_1 = \frac{a_1 \lambda_2}{a_3 (\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ e_2 &= h_2 g_2 = -\frac{a_1 \lambda_1}{a_3 (\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ e_3 &= h_3 g_3 = \frac{a_1}{a_3} = -\frac{k_1 k_0}{T_0}.\end{aligned} \quad (8.51)$$

В рассматриваемом примере $n = 3$ и один корень нулевой. В соответствии с общей теорией коэффициент $e_n = e_3$ должен быть отрицательным, что и имеет место в данном примере (с. примечание к уравнениям (8.28)).

Для получения достаточных условий абсолютной устойчивости подчиним прежде всего параметры e_1 и e_2 условию (8.36):

$$\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + r > 0.$$

С помощью формул (8.51), (8.50) и (8.49) это условие приводится к виду

$$r - \mu > 0, \tag{8.52}$$

где

$$\mu = k_0 k_1 T_2 / T_0.$$

Заметим, что при отсутствии обратной связи ($r = 0$) условие (8.52) не будет выполнено.

Вычислим по формулам (8.43), (8.51), (8.50) и (8.49) параметр θ . Получим

$$\theta = -\frac{1}{4} \left(4r - \mu - \frac{r}{v} \right),$$

где

$$v = T_1^2 / T_2^2.$$

Абсолютная устойчивость будет обеспечена при следующих условиях (в рассматриваемом примере $r = 1$):

- 1) $\mu < 1, \mu + 1/v > 4;$
- 2) $\mu < 1, (\sqrt{1 - \mu} + 1)^2 > 4 - \mu - 1/v.$

Первый случай отвечает условиям (8.36) и $\theta > 0$. Второй случай отвечает условиям (8.36) и (8.45). Комбинируя эти условия, можно получить более простые условия абсолютной устойчивости непрямого регулирования двигателя с жесткой обратной связью:

- 1) $\mu < 1, v \leq 1/2;$
- 2) $\mu < 1/v - 1/4v^2, v > 1/2.$ (8.53)

Область абсолютной устойчивости показана на рис. 8.6. Конечно, все выводы справедливы при сделанных предположениях.

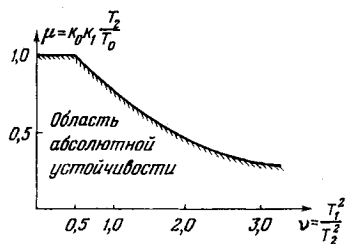


Рис. 8.6

**ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ
ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ****§ 9.1. Введение**

Частотные методы исследования устойчивости линейных и нелинейных систем весьма удобны для инженерных расчетов, поскольку частотная характеристика инвариантна относительно линейного неособенного преобразования координат и легко определяется как по уравнениям системы, так и экспериментально. Кроме того, частотные методы позволяют расширить класс рассматриваемых систем.

Впервые частотный критерий для исследования устойчивости линейных систем предложил Найквист в 1932 г. В 1958 г. румынский ученый В. М. Попов [43] получил достаточные условия абсолютной устойчивости в частотной форме, т. е. на языке требований, предъявляемых к частотной характеристике линейной части системы.

В 1962 г. В. А. Якубович [54], а затем в 1963 г. американский математик Р. Калман [55] опубликовали работы, из которых следует эквивалентность методов А. И. Лурье и В. М. Попова.

В этой главе кратко излагаются основы частотного метода В. М. Попова для исследования систем с непрерывными нелинейностями. Анализ систем с разрывными нелинейностями, скользящим режимом и неединственным положением равновесия («отрезком покоя») можно найти, например, в работах [15, 15б, 29, 30].

**§ 9.2. Передаточные функции
и частотные характеристики**

Рассмотрим линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{\alpha j} x_j + b_\alpha u \quad (\alpha = 1, \dots, n),$$
$$\sigma = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$
(9.1)

где $a_{\alpha j}$, b_{α} , c_j — постоянные коэффициенты, u — некоторая заданная функция времени.

Будем называть функцию u «входом» системы, а функцию σ «выходом» системы.

Заменяя в системе (9.1) формально оператор d/dt на p , получим соотношения

$$px_{\alpha} = \sum_{j=1}^n a_{\alpha j} x_j + b_{\alpha} u \quad (\alpha = 1, \dots, n),$$

$$\sigma = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

Исключив из этих равенств переменные x_1, \dots, x_n и выразив σ через u , придем к формуле

$$\sigma = W(p)u, \quad (9.2)$$

где

$$W(p) = \frac{Q_m(p)}{Q_n(p)}. \quad (9.3)$$

Здесь $Q_m(p)$ и $Q_n(p)$ — полиномы относительно p степени m и n соответственно. Очевидно, $m < n$ и $Q_n(p)$ является характеристическим многочленом однородной системы, получающейся из (9.1) при $u = 0$.

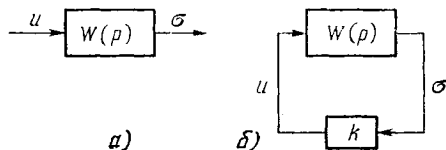


Рис. 9.1

Дробно-рациональная функция $W(p)$ называется *передаточной функцией* системы (9.1) от «входа» u к «выходу» σ . Это название вытекает непосредственно из равенства (9.2): передаточная функция $W(p)$ передает (преобразует) «вход» u в «выход» σ (рис. 9.1, а).

Заметим, что для определения передаточной функции не надо предварительно приводить систему к виду (9.1), разрешенному относительно производных. Если система содержит производные выше первого порядка, то для вычисления передаточной функции надо заменить d^k/dt^k на p^k .

Пример 1. Найдем передаточную функцию от «входа» u к «выходу» x в уравнении $\dot{x} + 3x = u$. Заменяя \dot{x} на px , получим $px + 3x = u$. Следовательно, передаточная функция имеет вид $1/(p + 3)$.

Пример 2. Найдем передаточную функцию от «входа» f к «выходу» σ в системе

$$\begin{aligned} T\ddot{\psi} + \dot{\psi} &= -k\xi, \\ \dot{\xi} &= f, \\ \sigma &= c_1\dot{\psi} + c_2\psi - r\xi, \end{aligned} \quad (9.4)$$

где T, k, c_1, c_2, r — постоянные. Делая элементарные выкладки, последовательно найдем

$$(Tp^2 + p)\psi = -k\xi, \quad p\xi = f, \quad \sigma = (c_1p + c_2)\psi - r\xi.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{p}f, \quad \psi = -\frac{k}{Tp^2 + p}\xi = -\frac{k}{p(Tp^2 + p)}f, \\ \sigma &= \left[-\frac{k(c_1p + c_2)}{Tp^2 + p^2} - \frac{r}{p} \right] f = -\frac{kc_1p + kc_2 + Trp^2 + rp}{p^2(Tp + 1)}f. \end{aligned}$$

Следовательно, искомая передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{Trp^2 + (kc_1 + r)p + kc_2}{p^2(Tp + 1)}. \quad (9.5)$$

Покажем, что передаточная функция не изменяется при линейном преобразовании системы. Для этого запишем уравнения (9.1) в матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad \sigma = c'x, \quad (9.6)$$

где A — квадратная постоянная матрица, b — постоянная матрица-столбец, c' — постоянная матрица-строка, $x(t)$ — матрица-столбец, u — скалярная функция. Найдем передаточную функцию от «входа» ($-u$) к «выходу» σ . Введя оператор $p = d/dt$ и единичную матрицу E , последовательно получим

$$px = Ax + bu, \quad x = -(A - pE)^{-1}bu, \quad \sigma = -c'(A - pE)^{-1}bu.$$

Следовательно, передаточная функция для системы (9.6) будет

$$W(p) = c'(A - pE)^{-1}b. \quad (9.7)$$

Сделав в системе (9.6) линейное преобразование $x = \Lambda y$, где Λ — квадратная неособенная постоянная матрица, получим

$$\Lambda \dot{y} = A\Lambda y + bu, \quad \sigma = c'\Lambda y.$$

Отсюда

$$\dot{y} = \Lambda^{-1}A\Lambda y + \Lambda^{-1}bu, \quad \sigma = c'\Lambda y. \quad (9.8)$$

Полагая $\dot{y} = py$ и выполняя последовательно очевидные преобразования, получим

$$y = -\Lambda^{-1}(A - Ep)^{-1}bu.$$

Теперь находим

$$\sigma = -c'\Lambda\Lambda^{-1}(A - Ep)^{-1}bu = -c'(A - Ep)^{-1}bu.$$

Из этого равенства видно, что передаточная функция преобразованной системы (9.8) равна передаточной функции $W(p)$ исходной системы, иными словами, передаточная функция *инвариантна* относительно линейного преобразования.

Если в передаточную функцию (9.3) подставить $p = i\omega$, где $i = \sqrt{-1}$, а ω — вещественное число, то получим функцию $W(i\omega)$, называемую

частотной характеристикой системы (9.1). Функция $W(i\omega)$ имеет простой наглядный смысл. Действительно, пусть «вход» $u(t)$ представляет возмущение, изменяющееся по гармоническому закону. Представим его в комплексной форме $u = re^{i\omega t}$, где r — амплитуда возмущения, а $e^{i\omega t}$ — комплексный гармонический сигнал частоты ω . Подставим это значение для u в равенство (9.2), заменив в нем предварительно p на $i\omega$. Имеем

$$\sigma = W(i\omega)re^{i\omega t}.$$

Равенство (9.2) можно рассматривать как дифференциальное уравнение, эквивалентное системе (9.1). При гармоническом возмущении частное решение этого линейного уравнения будет определять вынужденное колебание той же частоты ω , но другой амплитуды R при сдвинутой фазе (предполагается, что знаменатель передаточной функции (9.3) не имеет корней, равных ω). Из этого следует, что «выход» σ можно представить равенством

$$\sigma = Re^{i(\omega t + \varphi)},$$

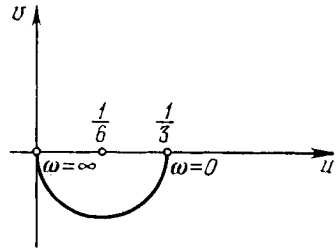


Рис. 9.2

где φ — сдвиг фазы. Сравнивая полученные два выражения для «выхода» σ и представляя частотную характеристику в следующей форме: $W(i\omega) = |W(i\omega)| e^{i \arg W}$, получим

$$R = |W(i\omega)| r, \quad \varphi = \arg W(i\omega).$$

Таким образом, модуль частотной характеристики равен отношению амплитуды вынужденного колебания на «выходе» системы к амплитуде гармонического возмущающего воздействия на ее «входе», а аргумент частотной характеристики равен сдвигу фазы вынужденного колебания.

Выделим в $W(i\omega)$ вещественную и мнимую части:

$$W(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega). \quad (9.9)$$

На плоскости (u, v) при изменении ω конец вектора $W(i\omega)$ описывает кривую, представляющую собой *годограф* частотной характеристики (она называется также *амплитудно-фазовой характеристикой* системы).

Для примера 1 имеем (с. 288)

$$W(i\omega) = \frac{1}{i\omega + 3} = \frac{3 - i\omega}{\omega^2 + 9}.$$

Поэтому

$$u(\omega) = \frac{3}{\omega^2 + 9}, \quad v(\omega) = -\frac{\omega}{\omega^2 + 9}$$

и годограф частотной характеристики при изменении ω от 0 до $+\infty$ представляет полуокружность, изображенную на рис. 9.2. Действительно, исключая из последних равенств параметр ω , получим

$$\left(u - \frac{1}{6}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2.$$

§ 9.3. Критерий Найквиста устойчивости линейной системы

Положив в системе (9.1) $u = -k\sigma$, где k — постоянная, получим однородную систему

$$\dot{x}_\alpha = \sum_{j=1}^n a_{\alpha j} x_j - kb_\alpha \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (\alpha = 1, \dots, n), \quad (9.10)$$

которую, в отличие от *разомкнутой* системы (9.1), называют *замкнутой*. Если система (9.1) схематично изображается рис. 9.1, а, то замкнутой системе (9.10) соответствует рис. 9.1, б.

Попытаемся выяснить, при каких значениях параметра k замкнутая система (9.10) асимптотически устойчива, т. е. все корни ее характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части и, следовательно, лежат в левой полуплоскости.

Например, для асимптотической устойчивости уравнения

$$\dot{x} + 3x = -kx \quad (9.11)$$

необходимо и достаточно, чтобы $k > -3$. Действительно, в этом случае корень $-(k + 3)$ характеристического

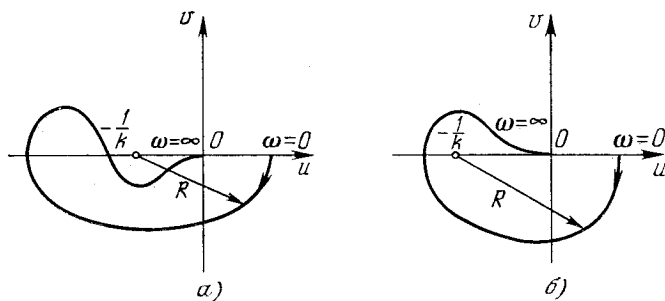


Рис. 9.3

уравнения будет отрицательным. Для систем более высокого порядка поставленный вопрос не тривиален.

Ответ на него и дает критерий Найквиста. Оказывается, об асимптотической устойчивости замкнутой системы (9.9) можно судить по поведению частотной характеристики $W(i\omega)$ разомкнутой системы (9.1). Ограничимся случаем, когда полином $Q_n(p)$, стоящий в знаменателе передаточной функции (9.3), имеет все корни в левой полуплоскости, т. е. разомкнутая однородная система асимптотически устойчива.

На плоскости u, v построим вектор R , выходящий из точки $(-1/k, 0)$ и оканчивающийся в точке $(u(\omega), v(\omega))$, лежащей на годографе частотной характеристики. При изменении ω угол φ между этим вектором и осью абсцисс будет меняться. Критерий Найквиста утверждает, что для асимптотической устойчивости замкнутой системы (9.10) необходимо и достаточно, чтобы приращение $\Delta\varphi$ угла φ при изменении ω от 0 до $+\infty$ равнялось нулю. На рис. 9.3, а, очевидно, $\Delta\varphi = 0$, а на рис. 9.3, б $\Delta\varphi = 2\pi$.

Для частотной характеристики, изображенной на рис. 9.2, $\Delta\varphi = 0$, если точка $(-1/k, 0)$ лежит вне диаметра полуокружности, и $\Delta\varphi = \pi$, если эта точка лежит на интервале $(0, 1/3)$. Таким образом, для асимптотической устойчивости уравнения (9.11) необходимо и достаточно, чтобы $-1/k < 0$ либо $-1/k > 1/3$. Отсюда получаем неравенство $k > -3$, установленное ранее: из элементарных соображений. Доказательство сформулированного критерия Найквиста можно найти в книге Е. П. Попова [44].

То обстоятельство, что устойчивость замкнутой системы (9.10) определяется по годографу частотной характеристики разомкнутой системы (9.1), является сильной стороной критерия Найквиста. Недостатки этого критерия состоят в том, что он требует реального построения годографа частотной характеристики системы (9.1), что в свою очередь требует знания численных значений всех коэффициентов передаточной функции. Таким образом, критерий Найквиста дает возможность проверить устойчива или неустойчива рассматриваемая система при выбранных численных значениях коэффициентов, но в общем случае с его помощью нельзя построить область устойчивости в пространстве коэффициентов.

В следующих параграфах будут рассмотрены частотные методы, применимые не только к линейным, но и к нелинейным звеньям замыкания и свободные от этих недостатков.

§ 9.4. Частотные критерии абсолютной устойчивости систем с непрерывной нелинейностью

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} &= \sum_{j=1}^n a_{\alpha j} x_j + b_\alpha u \quad (\alpha = 1, \dots, n), \\ u &= -\varphi(\sigma), \\ \sigma &= \sum_{j=1}^n c_j x_j, \end{aligned} \quad (9.12)$$

где $\varphi(\sigma)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая при $\sigma \neq 0$ условию

$$0 < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < k \leq +\infty, \quad (9.13)$$

а $a_{\alpha j}$, b_α , c_j — постоянные коэффициенты,

Условие (9.13) означает, что на плоскости (σ, φ) график функции $\varphi = \varphi(\sigma)$ должен находиться в секторе, ограниченном осью σ и прямой $\varphi = k\sigma$ (рис. 9.4), причем закон изменения функции $\varphi = \varphi(\sigma)$ может быть любым, в частности он может иметь вид, изображенный на рис. 8.2, а.

Как видно, отличие системы (9.12) от (9.10) заключается в том, что (9.12) получается из системы (9.1) путем замыкания через ее нелинейное звено

$$u = -\varphi(\sigma).$$

Поэтому критерий Найквиста к системе (9.12) неприменим.

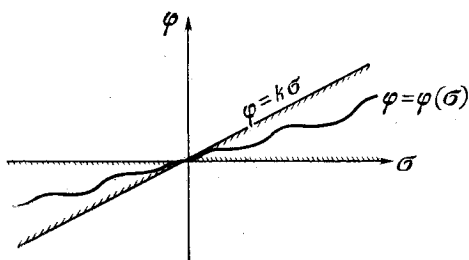


Рис. 9.4

Вместо него для нелинейной системы (9.12) установлен следующий частотный критерий абсолютной устойчивости.

Обозначим через $W(p)$ передаточную функцию системы (9.12) от «входа» $(-\varphi)$ к «выходу» σ .

В зависимости от расположения полюсов ¹⁾ передаточной функции $W(p)$ различают некритический случай, когда все полюсы лежат в левой полуплоскости, а также критические случаи, когда имеются полюсы на мнимой оси.

Приведем без вывода основные теоремы, определяющие достаточные условия абсолютной устойчивости систем рассматриваемого класса при условии, что нелинейность непрерывна (доказательство можно найти в [2, 53]).

Теорема 1 (некритический случай). Пусть выполнены следующие условия:

1) нелинейная функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию (9.13);

2) все полюсы $W(p)$ имеют отрицательные вещественные части;

¹⁾ То есть корней полинома, стоящего в знаменателе $W(p)$.

3) существует такое вещественное число ϑ , что при всех $\omega \geq 0$ выполнено частотное условие

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re} [(1 + i\omega\vartheta)W(i\omega)] \geq 0. \quad (9.14)$$

Тогда система (9.8) абсолютно устойчива.

Частотный критерий (9.14) допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Так как $W(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$, то условие (9.14) равносильно неравенству

$$\frac{1}{k} + u(\omega) - \vartheta\omega v(\omega) \geq 0. \quad (9.15)$$

Построим видоизмененную частотную характеристику, изображающая точка которой определяется координатами

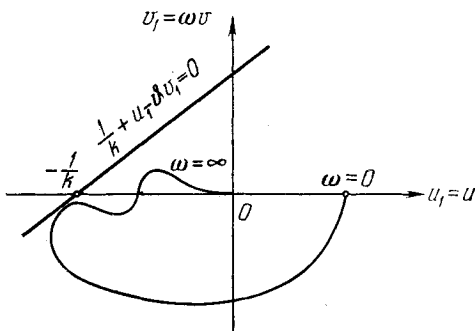


Рис. 9.5

$u(\omega)$, $\omega v(\omega)$. Если ввести новую плоскость $u_1 = u$, $v_1 = \omega v$ и на этой плоскости построить годограф видоизмененной частотной характеристики при $\omega \geq 0$, то условие (9.14) означает, что должна существовать прямая $1/k + u_1 - \vartheta v_1 = 0$, проходящая через точку $(-1/k, 0)$ и лежащая левее этого видоизмененного годографа (рис. 9.5).

Частотный критерий (9.14) гарантирует абсолютную устойчивость системы (9.12) в том смысле, что начало координат устойчиво в целом, какова бы ни была непрерывная функция $\varphi(\sigma)$, график которой заключен в сектор (9.13). В частности, будет устойчива в целом любая линейная система, получающаяся из (9.12) при $\varphi(\sigma) = h\sigma$, $0 < h < k$.

Теорема 2 (критический случай одного нулевого полюса).

Предположим, что выполнены следующие требования:

1) нелинейная функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию (9.13);

2) передаточная функция $W(p)$ имеет один нулевой полюс, а остальные ее полюсы (если $n > 1$) имеют отрицательные вещественные части;

3) $\rho = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p) > 0$ и существует такое вещественное число δ , что при всех $\omega \geq 0$ выполнено частотное условие (9.14).

Тогда система (9.12) абсолютно устойчива.

Теорема 3 (критический случай двух нулевых полюсов).

Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет неравенству (9.13) при $k = \infty^1$ и соотношению

$$\int_0^{\pm\infty} \varphi(\sigma) d\sigma = \infty; \quad (9.16)$$

2) передаточная функция имеет два нулевых полюса, а остальные ее полюсы (если $n > 2$) имеют отрицательные вещественные части;

$$3) \quad \alpha = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 W(p) > 0,$$

$$\rho = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} [p^2 W(p)] > 0,$$

$$\pi(\omega) = \omega \operatorname{Im} W(i\omega) < 0 \text{ при всех } \omega > 0,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(\omega) < 0.$$

Тогда система (9.12) абсолютно устойчива.

Прежде чем перейти к примерам, заметим, что критерии абсолютной устойчивости, установленные теоремами 1—3, носят аналитический характер и для проверки их не нужно строить годограф передаточной функции $W(i\omega)$ и не нужно знать численные значения коэффициентов системы (9.12). Поэтому с их помощью можно строить области абсолютной устойчивости, что нельзя сделать, даже для линейного звена замыкания, применяя критерий Найквиста.

¹⁾ Случай $k = \infty$ означает, что сектор, изображенный на рис. 9.4, образован координатными осями σ , φ , т. е. полностью заполняет первый и третий квадранты.

§ 9.5. Примеры

Пример 1 (математический). Рассмотрим сначала чисто математическую задачу. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned}\tau_1 \dot{x}_1 + x_1 &= x_3 - \Phi(x_2), \\ \tau_2 \dot{x}_2 + x_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= -x_2,\end{aligned}\tag{9.17}$$

где $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$ — постоянные времена, а функция $\Phi(x_2)$ непрерывна и удовлетворяет условию (9.13) при $k = \infty$.

Найдем передаточную функцию от «входа» $(-\Phi)$ к «выходу» $\bullet = x_2$. Для этого введем прежде всего оператор $p = d/dt$ и перепишем систему (9.17) в следующей форме:

$$\begin{aligned}(\tau_1 p + 1)x_1 &= x_3 - \Phi(x_2), \\ (\tau_2 p + 1)x_2 &= x_1, \quad px_3 = -x_2.\end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений x_1 и x_3 , найдем

$$x_2 = -\frac{p}{\tau_1 \tau_2 p^3 + (\tau_1 + \tau_2) p^2 + p + 1} \Phi.$$

Следовательно, передаточная функция для данного примера равна (напомним, что «вход» равен $(-\Phi)$)

$$W(p) = \frac{p}{\alpha p^3 + \beta p^2 + p + 1},$$

где

$$\alpha = \tau_1 \tau_2, \quad \beta = \tau_1 + \tau_2.$$

Пусть

$$\beta > \alpha.\tag{9.18}$$

Тогда, применяя критерий Гурвица (4.30), найдем, что все полюсы передаточной функции (корни ее знаменателя) имеют отрицательные вещественные части и, следовательно, можно воспользоваться теоремой 1.

Составим левую часть условия (9.14). Проведя несложные преобразования, последовательно получим (по условию $k = \infty$)

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} [(1 + i\omega\vartheta) W(i\omega)] &= \\ &= \operatorname{Re} \frac{(1 + i\omega\vartheta) i\omega}{1 - \beta\omega^2 + i\omega(1 - \alpha\omega^2)} = \frac{\omega^2 [(\vartheta\beta - \alpha)\omega^2 + (1 - \vartheta)]}{(1 - \beta\omega^2)^2 + \omega^2(1 - \alpha\omega^2)^2}.\end{aligned}$$

Для выполнения неравенства (9.14) при всех $\omega \geq 0$ необходимо и достаточно, чтобы число ϑ удовлетворяло условиям $\vartheta\beta - \alpha \geq 0$, $1 - \vartheta \geq 0$. Отсюда

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \vartheta \leq 1.$$

Такое ϑ найдется ввиду (9.18). Следовательно, в силу теоремы 1 область абсолютной устойчивости системы (9.17) определяется неравенством (9.18) или, переходя к исходным коэффициентам, условием

$$\tau_1 + \tau_2 > \tau_1 \tau_2.$$

На рис. 9.6 показана область абсолютной устойчивости системы (9.17) (она ограничена прямыми $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$ и одной ветвью гиперболы $\tau_1 + \tau_2 = \tau_1\tau_2$).

Пример 2. Исследование устойчивости самолета с курсовым автопилотом. При регулировании курса самолета (объект регулирования) на нем устанавливаются два чувствительных элемента (Ч.Э.). Первый (Ч.Э. I) представляет свободный гироскоп — он измеряет отклонение самолета от курса (угол ψ). Второй чувствительный элемент (Ч.Э. II) представляет гироскопический тахометр — он измеряет скорость изменения угла ψ , т. е. $\dot{\psi}$. С помощью потенциометров измеренные величины (ψ и $\dot{\psi}$) преобразуются в соответствующие напряжения U_1 и U_2 , которые подаются на усилитель (суммирующий прибор) (рис. 9.7). Усилитель вырабатывает напряжение U , воздействующее на электродвигатель.

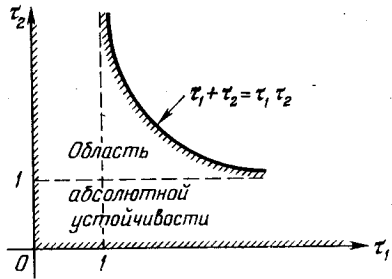


Рис. 9.6

Последний с помощью редуктора поворачивает руль самолета (регулирующее устройство) на угол ξ , в результате чего выравнивается отклонение самолета от заданного курса. Одновременно

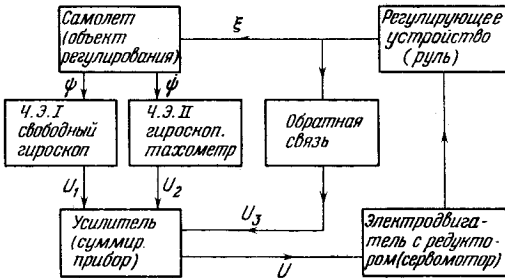


Рис. 9.7

угол ξ поворота руля регистрируется механизмом обратной связи, который преобразует сигнал ξ в напряжение U_3 ; это напряжение подается в усилитель — см. [44].

Перейдем к составлению дифференциальных уравнений возмущенного движения всей системы.

Уравнение отклонения самолета от заданного курса в простейших предположениях имеет вид

$$T\ddot{\psi} + \dot{\psi} = -k\xi.$$

Здесь T — постоянная времени самолета, характеризующая его инерционность, k — постоянный коэффициент, характеризующий момент сил, создаваемых рулем.

Чувствительные элементы (гироскопы с потенциометрами) практически безынерционны, и вырабатываемые ими напряжения U_1 и U_2 пропорциональны измеряемым величинам

$$U_1 = k_1\psi, \quad U_2 = k_2\psi.$$

Будем считать, что механизм обратной связи жесткий. Это означает, что вырабатываемое им напряжение U_3 пропорционально углу ξ отклонения руля:

$$U_3 = k_3\xi.$$

Усилитель, суммируя входящие в него напряжения, дает на выходе напряжение U , определяемое равенством

$$U = k_4U_1 + k_5U_2 - k_6U_3,$$

где k_4 , k_5 и k_6 — коэффициенты усиления.

Учитывая значения U_1 , U_2 и U_3 , получим

$$U = c_1\dot{\psi} + c_2\psi - r\xi,$$

где

$$c_1 = k_2k_5, \quad c_2 = k_1k_4, \quad r = k_3k_6.$$

Электродвигатель с редуктором и рулем представляют нелинейный элемент, уравнение которого имеет вид

$$\ddot{\xi} = f(U).$$

Перепишем полученные уравнения в виде системы, заменив предварительно U на σ :

$$\begin{aligned} T\ddot{\psi} + \dot{\psi} &= -k\xi, \\ \ddot{\xi} &= f(\sigma), \\ \sigma &= c_1\dot{\psi} + c_2\psi - r\xi. \end{aligned}$$

Передаточную функцию от $-f$ к σ для этой системы мы нашли в § 9.2 (см. (9.4) и (9.5)):

$$W(p) = \frac{Trp^2 + (kc_1 + r)p + kc_2}{p^2(Tp + 1)}.$$

Она имеет два нулевых полюса, и, следовательно, можно воспользоваться теоремой 3.

Подчиним коэффициенты системы условиям 2, 3 этой теоремы. После очевидных преобразований получим

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow 0} p^2W(p) = kc_2,$$

$$\rho = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} [p^2W(p)] = r + k(c_1 - c_2T),$$

$$\pi(\omega) = \omega \operatorname{Im} \frac{kc_2 - rT\omega^2 + i\omega(kc_1 + r)}{-\omega^2(1 + T i\omega)} = -\frac{rT\omega^2 + r + k(c_1 - c_2T)}{1 + T\omega^2},$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(\omega) = -r.$$

Поэтому условия 2, 3, теоремы 3 выполняются, если

$$kc_2 > 0, \quad r + k(c_1 - c_2T) > 0, \quad r > 0. \quad (9.19)$$

Следовательно, рассматриваемая система абсолютно устойчива при выполнении неравенств (9.19), если нелинейность удовлетворяет условию 1 теоремы 3.

На плоскости переменных $\lambda = (c_2 T - c_1)k$ и r последние два неравенства (9.19) образуют заштрихованную область, изображенную на рис. 9.8 (условие $kc_2 > 0$ выполняется всегда).

Пример 3. Непрямое регулирование двигателя с жесткой обратной связью. Сравним частотный метод исследования абсолютной устойчивости с методом А. И. Лурье. С этой целью рассмотрим систему непрямого регулирования двигателя с жесткой обратной связью, описываемую уравнениями (см. пример § 8.5)

$$T_0 \dot{z} = -k_0 \xi, \quad T_1^2 \ddot{x} + T_2 \dot{x} + x = k_1 z, \quad (9.20)$$

$$\dot{\xi} = f(\sigma), \quad \sigma = x - \xi,$$

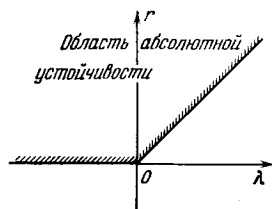


Рис. 9.8

где T_0, T_1, T_2, k_0, k_1 — положительные параметры.

Сначала найдем передаточную функцию от $(-f)$ к σ . Имеем

$$T_0 p z = -k_0 \xi, \quad (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)x = k_1 z, \\ p \xi = f(\sigma), \quad \sigma = x - \xi.$$

Из первого и третьего уравнения найдем

$$\xi = \frac{1}{p} f, \quad z = -\frac{k_0}{T_0 p} \xi = -\frac{k_0}{T_0 p^2} f.$$

Согласно второму и четвертому уравнениям, получим

$$x = -\frac{k_0 k_1}{T_0 p^2 (T_1 p^2 + T_2 p + 1)} f, \\ \sigma = -\left[\frac{k_0 k_1}{T_0 p^2 (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)} + \frac{1}{p} \right] f.$$

Следовательно, передаточная функция

$$W(p) = \frac{k_0 k_1}{T_0 p^2 (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)} + \frac{1}{p}$$

имеет два нулевых полюса. Воспользуемся теоремой 3 и подчиним коэффициенты системы условиям теоремы. После несложных преобразований получим

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 W(p) = \frac{k_0 k_1}{T_0}, \\ \rho = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} [p^2 W(p)] = -\frac{k_0 k_1 T_2}{T_0} + 1,$$

$$\begin{aligned} \pi(\omega) &= \omega \operatorname{Im} \left[\frac{k_0 k_1}{T_0 \omega^2 (T_1^2 \omega^2 - 1 - T_2 \omega i)} + \frac{1}{i\omega} \right] = \\ &= \frac{k_0 k_1 T_2}{T_0 [(T_1^2 \omega^2 - 1)^2 + T_2^2 \omega^2]} - 1. \end{aligned}$$

Согласно теореме 3, для абсолютной устойчивости системы достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} \alpha > 0, \quad \rho > 0, \quad \pi(\omega) < 0 \quad \text{при всех } \omega \geq 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(\omega) < 0. \end{aligned}$$

Первое и последнее условия выполняются, очевидно, всегда. Второе условие $\rho > 0$ будет выполнено при $\mu < 1$, где $\mu = k_0 k_1 T_2 / T_0$. Третье условие равносильно неравенству

$$T_2^2 \omega^2 + (T_1^2 \omega^2 - 1)^2 - \mu > 0.$$

Если ввести обозначения $v = T_1^2 / T_2^2$, $\omega^2 T_2^2 = y$, то это неравенство приводится к виду

$$v^2 y^2 + (1 - 2v)y + 1 - \mu > 0. \quad (9.21)$$

Так как условие $\pi(\omega) < 0$ должно выполняться при всех $\omega \geq 0$, то неравенство (9.21) должно быть справедливо при всех $y \geq 0$. При $v \leq 1/2$ средний коэффициент левой части этого неравенства будет неотрицателен при двух положительных других коэффициентах ($\mu < 1$). Поэтому при $v \leq 1/2$ неравенство (9.21) будет справедливо при всех $y \geq 0$.

Пусть теперь $v > 1/2$. Корни полинома, стоящего в левой части (9.21), определяются формулой

$$y_{1,2} = \frac{2v - 1 \pm \sqrt{(2v - 1)^2 - 4v^2(1 - \mu)}}{2v^2}.$$

Если подкоренное выражение положительно или равно нулю, то условие (9.21) нарушается при $y = y_1 > 0$. В случае отрицательности подкоренного выражения корни полинома мнимые и, следовательно, (9.21) справедливо при всех $y \geq 0$.

Поэтому при $v > 1/2$ должно выполняться неравенство

$$(2v - 1)^2 < 4v^2(1 - \mu),$$

которое равносильно следующему:

$$\mu < \frac{1}{v} - \frac{1}{4v^2}.$$

Таким образом, согласно теореме 3, область абсолютной устойчивости системы (9.20) имеет вид

$$\begin{aligned} \mu < 1 & \quad \text{при } v \leq 1/2, \\ \mu < 1/v - 1/4v^2 & \quad \text{при } v > 1/2 \end{aligned}$$

и совпадает с областью, найденной в предыдущей главе при помощи метода А. И. Лурье (см. (8.53) и рис. 8.6).

Сравнение двух методов исследования абсолютной устойчивости, проведенное на этом примере, показывает, что частотный метод, не изменяя области устойчивости, более экономичен с точки зрения количества необходимых вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абгарян К. А. Устойчивость движения на конечном интервале // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика.— М.: ВИНТИ, 1976.— Т. 3.
2. Айзерман М. А. и Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем.— М.: АН СССР, 1963.
- 2а. Анапольский Л. Ю., Иргетов В. Д., Матросов В. М. Способы построения функций Ляпунова // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика.— М.: ВИНТИ, 1975.— Т. 2.
3. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации. Автономные системы.— М.: Наука, 1966.
4. Андронов А. А., Витт А. А. и Хайкин С. Э. Теория колебаний.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1959.
5. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости движения.— М.: Наука, 1967.
6. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова.— М.: Наука, 1970.
7. Басин А. М. Качка судов.— М.: Транспорт, 1969.
8. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1954.
9. Беллман Р. Введение в теорию матриц: Пер. с англ.— М.: Наука, 1969.
10. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем.— М.: Гостехиздат, 1956.
11. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.— М.: Физматгиз, 1961.
12. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики.— Т. 2.— М.: Наука, 1971.
- 12а. Вектор-функции Ляпунова и их построение / Под ред. В. М. Матросова и Л. Ю. Анапольского.— Новосибирск: Наука, СО, 1980.
13. Вышнеградский И. А. О регуляторах прямого действия // Д. К. Максвелл, И. А. Вышнеградский и А. Стодола. Теория автоматического регулирования.— М.: АН СССР, 1949.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— 3-е изд.— М.: Наука, 1967.
15. Гелиг А. Х. Исследование устойчивости нелинейных разрывных систем автоматического регулирования с неединственным равновесным состоянием // Автоматика и телемеханика.— 1964.— № 2.
- 15а. Гелиг А. Х., Комарницкая О. И. Абсолютная устойчивость нелинейных систем с неединственным положением

- равновесия в критических случаях // Автоматика и телемеханика. — 1966. — № 8.
156. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978.
 16. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
 17. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов. — М.: АН СССР, 1959.
 18. Дубошин Г. Н. Основы теории устойчивости движения. — М.: МГУ, 1952.
 19. Еругин Н. Н. Приводимые системы. — Минск: Наука и техника, 1966.
 20. Жуковский Н. Е. О прочности движения // Собр. соч. — М.: Гостехиздат, 1948. — Т. I.
 21. Зубов В. И. Устойчивость движения. — М.: Высшая школа, 1973.
 22. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса // ПММ, 1956. — Т. 20, вып. 4.
 23. Капца П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. — 1951. — Т. 21, вып. 5.
 24. Капца П. Л. Устойчивость и переход через критические обороты быстро вращающихся роторов при наличии трения // ЖТФ. — 1939. — Т. IX, вып. 2.
 - 24а. Карапетян А. В. Об обращении теоремы Рауса // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 1973. — № 5.
 25. Карачаров К. А. и Пилюттик А. Г. Введение в техническую теорию устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1962.
 26. Кац И. Я. и Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // ПММ. — 1960. — Т. 24, вып. 5.
 - 26а. Кельзон А. С., Циманский Ю. П., Яковлев В. И. Динамика роторов в упругих опорах. — М.: Наука, 1982.
 27. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.
 28. Кузьмин П. А. Малые колебания и устойчивость движения. — М.: Наука, 1973.
 29. Ла-Салль Ж. и Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова: Пер. с англ. — М.: Мир, 1964.
 30. Леонов Г. А. Об устойчивости нелинейных регулируемых систем с неединственным положением равновесия // Автоматика и телемеханика. — 1971. — № 10.
 31. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. — 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1962.
 32. Лефшец С. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления: Пер. с англ. — М.: Мир, 1967.
 33. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.: Гостехиздат, 1951.
 34. Лурье А. И. и Постников В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем // ПММ. — 1944. — Т. 8, вып. 3.
 35. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950.
 36. Матросов В. М. К вопросу устойчивости гироскопических систем с диссипацией // Труды Казанского авиац. ин-та. — 1959. — Вып. 45.

37. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения.— 2-е изд.— М.: Наука, 1966.
- 37а. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космонавтике.— М.: Наука, 1978.
38. Меркин Д. Р. Гироскопические системы.— М.: Гостехиздат, 1956; 2-е изд.— М.: Наука, 1974.
39. Меркин Д. Р. Достаточные условия асимптотической устойчивости одной нелинейной системы // Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена.— 1966.— Т. 125; 1958.— Т. 141.
40. Меркин Д. Р. К вопросу об устойчивости по структуре сил // ПММ.— 1975.— Т. 39, вып. 5.
- 40а. Меркин Д. Р. Об устойчивости стационарных движений оси вращающегося ротора, установленного в нелинейных подшипниках // ПММ.— 1983.— Т. 47, вып. 3.
41. Николаи Е. Л. Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня // Николаи Е. Л. Труды по механике.— М.: Гостехиздат, 1955.
42. Николаи Е. Л. Теоретическая механика.— М.: ГОНТИ, 1939.— Ч. 3.
43. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем: Пер. с рум.— М.: Наука, 1970.
44. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования.— М.: Гостехиздат, 1954.
- 44а. Преснов Е. В. Потенциальный характер критерия эволюции термодинамики необратимых процессов // ЖФХ.— 1973.— Т. 47, № 11.
45. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник МГУ.— 1957.— № 4.
46. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников // Математические методы в динамике космических аппаратов.— М.: ВЦ АН СССР.— 1967.— Вып. 4.
- 46а. Румянцев В. В., Карапетян А. В. Устойчивость движений неголономных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика.— М.: ВИНТИ, 1976.— Т. 3.
- 46б. Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ.— М.: Наука, 1978.
47. Старжинский В. М. Достаточные условия устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы // ПММ.— 1952.— Т. 16, вып. 3.
48. Тамм И. Е. Основы теории электричества.— 9-е изд.— М.: Гостехиздат, 1976.
49. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.— М.: АН СССР, 1962.
50. Якубович В. А. О нелинейных дифференциальных уравнениях систем автоматического регулирования с одним регулирующим органом // Вестник ЛГУ.— 1962.— № 7.
51. Якубович В. А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР.— 1962.— Т. 143, № 6.
52. Якубович В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. 1. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний // Автоматика и телемеханика.— 1964.— Т. 25, № 7.
53. Якубович В. А. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем в критических случаях // Автоматика

- и телемеханика. — 1963. — Т. 24, № 3; 1963. — Т. 24, № 6; 1964. — Т. 25, № 5.
- 53а. E d e l e n D. G. B. On the characterization of fluxes in non-linear irreversible thermodynamics // Int. J. Eng. Sci.— 1974.— №. 12.
- 53б. H a g e d o r n P. Die Umkehrung der Stabilitätssätze von Lagrange — Dirichlet und Routh // Arch. Rational Mech. and Anal.— 1971.— Bd 42, № 4. (Русск. перев.: Х а г е д о р н П., Обращение теорем Лагранжа — Дирихле и Рауса // Механика: Период. сб. переводов ин. ст.— 1972.— № 5.
- 53в. H a g e d o r n P. Über die Instabilität konservativer Systeme mit girokopischen Kräften // Rational Mech and Anal.—1975.— Bd 58, № 1.
54. H e r r m a n G. Stability of Equilibrium of Elastic Systems Subjected to Nonconservative Forces // Applied Mechanics Reviews.—1967.— V. 20, № 2.
55. K a l m a n R. E Liapunov Functions for the Problem of Lurie in Automatic Controls // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. —1963.— V. 49.
56. R o u t h E. J. A treatise on the stability of a given state of motion.— London, 1877.
57. R o u t h E. J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies.— London, 1884.
58. T h o m s o n W. and T a i t P. Treatise on Natural Philosophy.— Cambridge University Press, 1879.— Part I.
59. W e h r l i C., Z i e g l e r H. Zur Klassifikation von Kräften // Schweiz. Bauzeitung.—1966.— V. 84, № 48.
60. Z i e g l e r H. Linear Elastic Stability. A Critical Analysis of Methods // ZAMP.— Basel — Zürich, IV, F—2.—1953.